تشریح کامل

مقاومت مصالح پوپوف

(جلد دوم)

مهندس مجید بوجاریان

مسائل فصل یازدهم

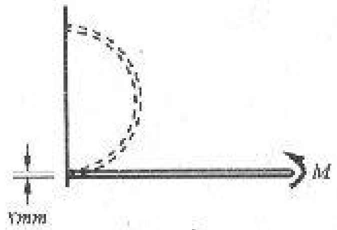
۱۱-۱. یک تسمهٔ فولادی ۶ × ۲ میلی‌متر به طول ۳۱۴ میلی‌متر، همانند شکل در یک انتها گیردار شده است. مقدار لنگر لازم برای اینکه سر آزاد تسمه با دیوار تماس پیدا کند، چقدر است. تحت این شرایط حداکثر تنش ایجاد شده در تسمه چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.

$$L = \pi R \Rightarrow R = \rho = \frac{L}{\pi} = \frac{۳۱۴}{۳/۱۴} \Rightarrow \rho = ۱۰۰\, mm$$

$$I = \frac{bh^۳}{۱۲} = \frac{۶(۲^۳)}{۱۲} = ۴ mm^۴$$

$$M = \frac{EI}{\rho} = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۴}{۱۰۰} = ۸۰۰۰\, N.mm$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۱}{۱۰۰} = ۲۰۰۰\, N/mm^۲$$



مسأله ۱-۱۱

۱۱-۲. یک میلهٔ آلمینیومی به قطر ۶ میلی‌متر به صورت حلقه‌ای به قطر متوسط ۳ متر خم شده است. حداکثر تنش به وجود آمده در میله چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.

$$E = ۰/۷ \times ۱۰^۵\, N/mm^۲$$

$$\rho = \frac{\bar{D}}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ m \quad ; \quad c = \frac{d}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ mm$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} = \frac{۰/۷ \times ۱۰^۵ \times ۳}{۱/۵ \times ۱۰^۳} = ۱۴۰\, N/mm^۲$$

۱۱-۳. اگر تنش‌های ناشی از خمش در حول محور X-X یک تیر با نیمرخ IPE ۲۰۰ مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع (مگاپاسکال) باشد، شعاع انحنای آن چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.

$$\sigma_{max} = ۱۴۰\, N/mm^۲ \quad ; \quad c = \frac{h}{۲} = \frac{۲۰۰}{۲} = ۱۰۰\, mm$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۱۰۰}{۱۴۰} \times ۱۰^{-۳} = ۱۴۲/۸۶ m$$

۱۱-۴. اگر رابطهٔ منحنی ارتجاعی برای یک تیر ساده به دهانهٔ L و EI ثابت، به‌صورت

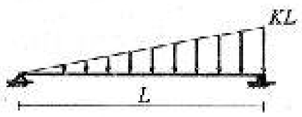
$$v = (k/۳۶۰EI)(-۳x^۵ + ۱۰x^۳L^۲ - ۷xL^۴)$$

باشد، بارگذاری تیر را تعیین نمایید.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

$$v = \frac{k}{360EI}(-3x^5 + 10x^3L^2 - 7xL^4)$$

$$v' = \frac{k}{360EI}(-15x^4 + 30x^2L^2 - 7L^4)$$



$$v'' = \frac{k}{360EI}(-60x^3 + 60xL^2)$$

$$v''' = \frac{k}{360EI}(-180x^2 + 60L^2)$$

$$v^{(4)} = \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{k}{360EI}(-360x) \Rightarrow \boxed{q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4} = -kx}$$

۱۱-۵. اگر رابطهٔ منحنی ارتجاعی یک تیر با EI ثابت و دهانه L به صورت:

$$EIv = M_0(x^3 - x^2L)/(4L)$$

باشد، مطلوب است: (الف) بارگذاری و وضعیت تکیه‌گاهی تیر (ب) رسم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و شکل تغییر شکل یافتهٔ تیر.

الف:

$$EIv(x) = M_0\frac{(x^3 - x^2L)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

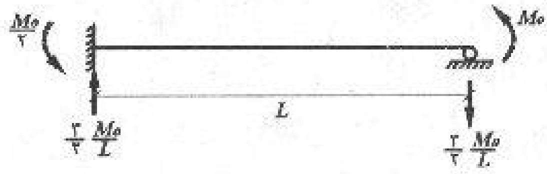
$$EI\theta(x) = M_0\frac{(3x^2 - 2xL)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(L) = \dfrac{M_0L}{4EI} \end{cases}$$

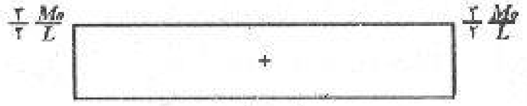
$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_0\frac{(6x - 2L)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} M(0) = -\dfrac{M_0}{2} \\ M(L) = M_0 \end{cases}$$

$$V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3} = M_0\frac{6}{(4L)} = \frac{3}{2}\frac{M_0}{L} \Rightarrow \begin{cases} V(0) = \dfrac{3}{2}\dfrac{M_0}{L} \\ V(L) = \dfrac{3}{2}\dfrac{M_0}{L} \end{cases}$$

$$q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

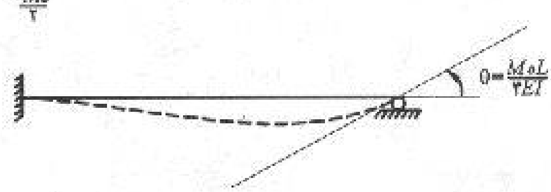
ب: با توجه به نتایج بدست آمدهٔ فوق، تیر به‌صورت یکسر ساده و یکسر گیردار به شکل زیر می‌باشد.





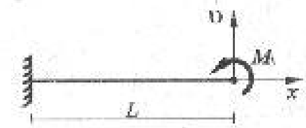
نیروی برشی

لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی

۱۱-۶. مثال ۱۱-۲ را با در نظر گرفتن مبداء مختصات در انتهای آزاد، مجدداً حل نمایید.



$$\left| \begin{array}{l} v(-L) = 0 \\ \theta(-L) = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} M(0) = M_1 \\ V(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = M_1$$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_1 x + c_2 \;:\; \theta(-L) = 0 \Rightarrow -M_1 L + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = M_1 L$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = M_1 x + M_1 L$$

$$EI\,v = M_1\frac{x^2}{2} + M_1 L x + C_2 \quad : \quad v(-L) = 0 \Rightarrow M_1\frac{L^2}{2} - M_1 L^2 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = M_1\frac{L^2}{2}$$

$$\therefore v = \frac{M_1}{2EI}(x^2 + 2Lx + L^2)$$

بدیهی است می‌توانستیم از ابتدا با تبدیل x به $(x + L)$ در رابطهٔ مثال (۱۱-۲) به نتیجهٔ اخیر برسیم.

۱۱-۷. با استفاده از رابطهٔ دیفرانسیل دقیق (رابطهٔ ۱۱-۲)، نشان دهید که رابطهٔ منحنی ارتجاعی در مثال ۱۱-۲ به صورت $(v-\rho)^2 + x^2 = \rho^2$ می‌باشد که در آن ρ مقدار ثابتی می‌باشد (راهنمایی: از $dv/dx = \tan\theta$ استفاده نمایید و انتگرال‌گیری کنید).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{dv}{dx} = \tan\theta \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = (1+\tan^2\theta)\,\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(1+\tan^2\theta)\,\dfrac{d\theta}{dx}}{[1+\tan^2\theta]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dfrac{d\theta}{dx}}{[1+\tan^2\theta]^{\frac{1}{2}}} = \cos\theta \times \frac{d\theta}{dx} \to \frac{1}{\rho}\,dx = \cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\rho} = \sin\theta \to \frac{x^2}{\rho^2} = \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \Rightarrow \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2}{1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{\dfrac{x^2}{\rho^2}}{1-\dfrac{x^2}{\rho^2}} = \frac{x^2}{\rho^2 - x^2} \to \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

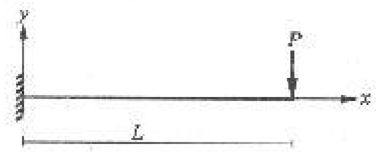
$$\Rightarrow v = -(\rho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

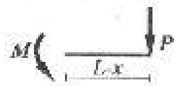
$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\rho + c \Rightarrow c = P$$

$$v = -(\rho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \rho \to (v-\rho)^2 + x^2 = \rho^2$$

۱۱-۸ تا ۱۱-۱۹. برای تیرهای نشان داده شده در شکل، رابطهٔ منحنی ارتجاعی را تعیین نمایید. برای حل مسائل می‌توانید از معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه ۴ و یا ۲ استفاده نمایید. برای تمام تیرها، EI ثابت می‌باشد.

مسأله ۱۱-۸





$$M(x) = -P(L-x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = -PL + Px \qquad \begin{cases}\theta(0) = 0\\ v(0) = 0\end{cases}$$

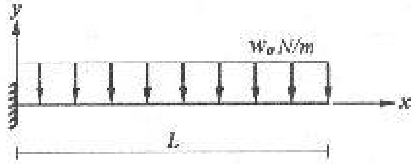
$$EI\frac{dv}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_2 : \theta(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

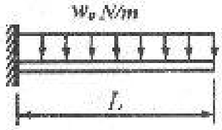
$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2}$$

$$EI\,v = -PL\,\frac{x^{۲}}{۲} + P\,\frac{x^{۳}}{۶} + C_{۲} \quad : \quad v(۰) = ۰$$

$$\Rightarrow C_{۲} = ۰$$

$$\therefore EIv = -PL\,\frac{x^{۲}}{۲} + P\,\frac{x^{۳}}{۶} = \frac{P}{۶}\,(x^{۳} - ۳Lx^{۲})$$





مسأله ۱۱-۹

$$EI\,\frac{d^{۴}v}{dx^{۴}} = -w_{۰}$$

$$\begin{vmatrix} V(L) = ۰ \\ M(L) = ۰ \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \theta(۰) = ۰ \\ v(۰) = ۰ \end{vmatrix}$$

$$EI\,\frac{d^{۳}v}{dx^{۳}} = -w_{۰}x + C_{۱} \quad : \quad V(L) = ۰ \Rightarrow c_{۱} = w_{۰}L$$

$$\therefore EI\,\frac{d^{۳}v}{dx^{۳}} = -w_{۰}(x - L)$$

$$EI\,\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = -w_{۰}\Big(\frac{x^{۲}}{۲} - Lx\Big) + C_{۲} : \quad M(L) = ۰ \Rightarrow -w_{۰}\Big(\frac{L^{۲}}{۲} - L^{۲}\Big) + C_{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow C_{۲} = -w_{۰}\frac{L^{۲}}{۲}$$

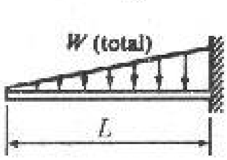
$$\therefore EI\,\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = -w_{۰}\Big(\frac{x^{۲}}{۲} - Lx + \frac{L^{۲}}{۲}\Big)$$

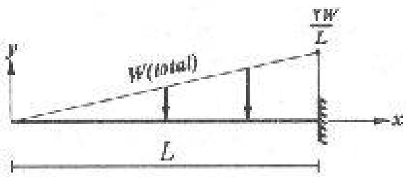
$$EI\,\frac{dv}{dx} = -w_{۰}\Big(\frac{x^{۳}}{۶} - L\,\frac{x^{۲}}{۲} + \frac{L^{۲}}{۲}x\Big) + C_{۳} : \quad \theta(۰) = ۰ \Rightarrow C_{۳} = ۰$$

$$\therefore EI\,\frac{dv}{dx} = -w_{۰}\Big(\frac{x^{۳}}{۶} - L\,\frac{x^{۲}}{۲} + \frac{L^{۲}}{۲}x\Big)$$

$$EIv = -w_{۰}\Big(\frac{x^{۴}}{۲۴} - L\,\frac{x^{۳}}{۶} + L^{۲}\,\frac{x^{۲}}{۴}\Big) + C_{۴} \quad : \quad v(۰) = ۰ \Rightarrow C_{۴} = ۰$$

$$\therefore EIv = \frac{-w_{۰}}{۲۴}\,(x^{۴} - ۴Lx^{۳} + ۶L^{۲}x^{۲})$$





مسأله ۱۱-۱۰

$$\begin{vmatrix} V(۰) = ۰ \\ M(۰) = ۰ \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \theta(L) = ۰ \\ v(L) = ۰ \end{vmatrix}$$

$$q(x) = -\frac{2W}{L^2}x$$

$$EI\,\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -\frac{2W}{L^2}x$$

$$EI\,\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{W}{L^2}x^2 + C_1 \quad : \quad V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \qquad \therefore EI\,\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{W}{L^2}x^2$$

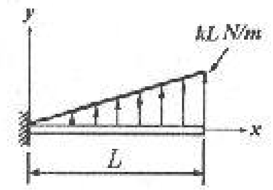
$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Wx^3}{3L^2} + C_2 \quad ، \quad M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad \therefore EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Wx^3}{3L^2}$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{Wx^4}{12L^2} + C_3 \quad ، \quad \theta(L) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{WL^2}{12} \qquad \therefore EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{W}{12}\left(\frac{x^4}{L^2} - L^2\right)$$

$$EIv = -\frac{W}{12}\left(\frac{x^5}{5L^2} - L^2x\right) + C_4$$

$$v_{(L)} = 0 \Rightarrow -\frac{W}{12}\left(\frac{L^3}{5} - L^3\right) + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{WL^3}{15}$$

$$\therefore EIv = -\frac{W}{12}\left(\frac{x^5}{5L^2} - L^2x\right) - \frac{WL^3}{15} = -\frac{W}{60L^2}\left(x^5 - 5L^4x + 4L^5\right)$$



مسئله ۱۱-۱۱

$$q(x) = kx$$

$$EI\,\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = kx \qquad \begin{cases} V(L) = 0 \\ M(L) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$EI\,\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{kx^2}{2} + C_1 \quad : \quad V(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{kL^2}{2}$$

$$\therefore EI\,\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{k}{2}\left(x^2 - L^2\right)$$

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{x^3}{3} - L^2x\right) + C_2 : M(L) = 0 \Rightarrow \frac{k}{2}\left(\frac{L^3}{3} - L^3\right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{kL^3}{3}$$

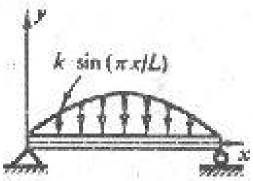
$$\therefore EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{k}{6}\left(x^3 - 3L^2x + 2L^3\right)$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = \frac{k}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3L^2x^2}{2} + 2L^3x\right) + C_3 \quad : \quad \theta(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = \frac{k}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3L^2x^2}{2} + 2L^3x\right)$$

$$EIv = \frac{k}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{L^2x^3}{2} + L^3x^2\right) + C_4 \quad : \quad v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EIv = \frac{kx^5}{120} - \frac{kL^2x^3}{12} + \frac{kL^3x^2}{6}$$



مسئله ۱۱-۱۲

$$q(x) = -k\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -k\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

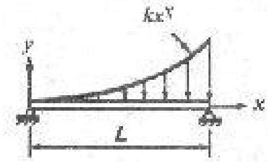
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{kL}{\pi}Cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 \quad \underset{x=\frac{L}{2}}{V} = 0 \text{ به‌علت تقارن } \Rightarrow C_1 + \frac{kL}{\pi}Cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{kL^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_2 \quad \underset{x=0}{M} = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{kL^2}{\pi^2}Sin\,0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{kL^3}{\pi^3}Cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_3 \quad \underset{x=\frac{L}{2}}{\theta} = 0 \text{ به‌علت تقارن } \Rightarrow C_3 - \frac{kL^3}{\pi^3}Cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EIv = -\frac{kL^4}{\pi^4} = Sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_4 \quad \underset{x=0}{v} = 0 \Rightarrow C_4 - \frac{kL^4}{\pi^4}Sin\,0 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EIv = -k\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 Sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



مسئله ۱۱-۱۳

$$q(x) = -kx^2$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -kx^2$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{kx^3}{3} + C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{kx^4}{12} + C_1x + C_2 \qquad \underset{x=0}{M} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\underset{x=L}{M} = 0 \Rightarrow -\frac{kL^4}{12} + C_1L = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{kL^3}{12}$$

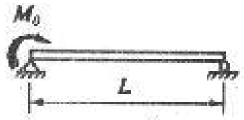
$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{kx^5}{60} + \frac{kL^3}{24}x^2 + C_3$$

$$EIv = -\frac{kx^6}{360} + \frac{kL^3}{72}x^3 + C_3x + C_4$$

$$v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{kL^6}{360} + \frac{kL^6}{72} + C_3L = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{kL^5}{90}$$

$$\therefore\ EIv = \frac{-kx^6}{360} + \frac{kL^3x^3}{72} - \frac{kL^5x}{90}$$



مسئله ۱۱-۱۴

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = C_1x + C_2 \ :\ \underset{x=0}{M} = M_0 \Rightarrow C_2 = M_0$$

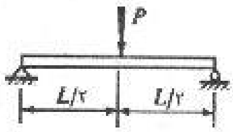
$$\underset{x=L}{M} = 0 \Rightarrow C_1L + M_0 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{M_0}{L}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{M_0}{2L}x^2 + M_0x + C_3$$

$$EIv = -\frac{M_0}{6L}x^3 + M_0\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \ :\ \underset{x=0}{v} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\underset{x=L}{v} = 0 \Rightarrow -\frac{M_0}{6L}.L^3 + M_0\frac{L^2}{2} + C_3L = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{M_0L}{3}$$

$$\therefore \boxed{EIv = \frac{-M_0}{6L}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)}$$



مسئله ۱۱-۱۵

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2}x$$

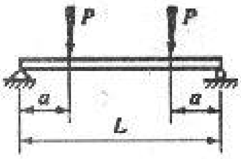
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = \frac{P}{2}x$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{P}{4}x^2 + C_1 \quad : \quad \theta_{x=\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{16} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

$$EIv = P\frac{x^3}{12} - PL^2\frac{x}{16} + C_2 \qquad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore\ EIv = \frac{P}{48}(4x^3 - 3L^2x)$$

بدیهی است به‌منظور تعیین رابطهٔ منحنی ارتجاعی در ناحیهٔ $\frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L$ کافی است در معادلهٔ اخیر x را به $(L-x)$ تبدیل نمائیم.



$0 \leqslant x \leqslant a \Rightarrow M(x) = Px$

مسأله ۱۱-۱۷

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = Px$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (1)$$

$$EIv = \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad ، \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad EIv = \frac{Px^3}{6} + C_1x$$

$$a \leqslant x \leqslant L - a \Rightarrow M(x) = Px - P(x-a) = Pa$$

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = Pa$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = Pax + B_1 \quad (2) \quad : \quad \theta_{x=\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{PaL}{2} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{PaL}{2}$$

$$EIv = \frac{Pax^2}{2} - \frac{PaLx}{2} + B_2 \quad (3)$$

معادلات (۱) و (۲) به ازاء $x = a$ باید با هم برابر باشند، بنابراین:

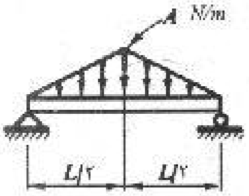
$$\frac{Pa^2}{2} + C_1 = Pa^2 - \frac{PaL}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{Pa}{2}(a-L)$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leqslant x \leqslant a : \quad EIv = \frac{Px^3}{6} + \frac{Pa}{2}(a-L)\,x} \quad (4)$$

همچنین معادلات (۳) و (۴) به ازاء $x = a$ باید با هم برابر باشند، لذا:

$$\frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2} + B_2 = \frac{Pa^3}{6} + \frac{Pa^2}{2}(a-L) \Rightarrow B_2 = \frac{Pa^3}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \leqslant x \leqslant L - a \quad : \quad EIv = \frac{Pax^2}{2} - \frac{PaLx}{2} + \frac{Pa^3}{6}}$$



$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} : q(x) = -\frac{2A}{L}\,x$

مسأله ۱۱-۱۷

$$EI\,\frac{d^4v}{dx^4} = -2\,\frac{A}{L}\,x$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{A}{L}x^2 + C_1 : \quad V_{x=\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{L}\left(\frac{L^2}{4}\right) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{AL}{4}$$

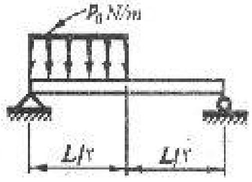
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{A}{L}\frac{x^3}{3} + \frac{AL}{4}x + C_2 \quad : M_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{A}{L}\frac{x^4}{12} + \frac{ALx^2}{8} + C_3 \quad \theta_{x=\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{-AL^3}{12\times 16} + \frac{AL^3}{8\times 4} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-5}{192}AL^3$$

$$EIv = \frac{-A}{L}\frac{x^5}{60} + \frac{ALx^3}{24} - \frac{5}{192}AL^3x + C_4 \quad : \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EIv = A\left(\frac{Lx^3}{24} - \frac{x^5}{60L} - \frac{5L^3x}{192}\right)$$

* برای ناحیهٔ $\frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L$ کافی است x را به $L - x$ تبدیل کنیم.



مسئله ۱۱-۱۸

$$R_A = \frac{3p_0L}{8} \quad \text{و} \quad R_B = \frac{p_0L}{8}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} \quad : \quad q(x) = -p_0$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -p_0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -p_0x + C_1 : \quad V_{x=0} = R_A \Rightarrow C_1 = \frac{3p_0L}{8}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p_0x^2}{2} + \frac{3p_0L}{8}x + C_2 \quad : \quad M_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{p_0x^3}{6} + \frac{3p_0Lx^2}{16} + C_3 \qquad (1)$$

$$EIv = -\frac{p_0x^4}{24} + \frac{p_0Lx^3}{16} + C_3x + C_4 : \; v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$EIv = -\frac{p_0x^4}{24} + \frac{p_0Lx^3}{16} + C_3x \qquad (2)$$

$$\frac{L}{2} \leqslant x < L \quad : \quad q(x) = 0$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = A_1 \quad : \quad V = -R_B \Rightarrow A_1 = -\frac{p_0L}{8}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p_0L}{8}x + A_1 \quad : \quad M_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{p_0L^2}{8} + A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{p_0L^2}{8}$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{p_0 L x^3}{16} + \frac{p_0 L^2 x}{8} + A_3 \quad (3)$$

$$EI\,v = -\frac{p_0 L\,x^3}{48} + \frac{p_0 L^2 x^2}{16} + A_3 x + A_4 \quad : \; v_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{-p_0 L^4}{48} + \frac{p_0 L^4}{16} + A_3 L + A_4 = 0$$

$$\Rightarrow A_4 = -\left(\frac{p_0 L^4}{24} + A_3 L\right)$$

$$EI\,v = -\frac{p_0 L\,x^3}{48} + \frac{p_0 L^2 x^2}{16} + A_3\,(x - L) - \frac{p_0 L^4}{24} \quad (4)$$

معادلات (۱) و (۳) و نیز معادلات (۲) و (۴) به‌ازاء $x = \frac{L}{2}$ باید با هم برابر باشند:

$$(1) \text{ و } (3) \text{ و } x = \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{p_0 L^3}{48} + \frac{3p_0 L^3}{64} + C_3 = -\frac{p_0 L^3}{64} + \frac{p_0 L^3}{16} + A_3$$

$$C_3 = A_3 + \frac{p_0 L^3}{48} \qquad (i)$$

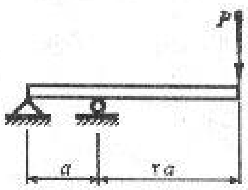
$$(2) \text{ و } (4) \text{ و } x = \frac{L}{2} \Rightarrow -\cancel{\frac{p_0 L^4}{384}} + \frac{p_0 L^4}{128} + C_3\,\frac{L}{2} = -\cancel{\frac{p_0 L^4}{384}} + \frac{p_0 L^4}{64} - \frac{A_3 L}{2} - \frac{p_0 L^4}{24}$$

$$C_3 = -A_3 - 13\,\frac{p_0 L^3}{192} \qquad (ii)$$

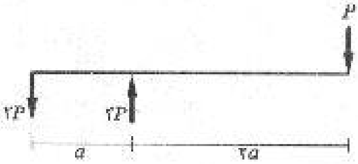
$$(i) \text{ و } (ii) \Rightarrow A_3 = -\frac{17 p_0 L^3}{384} \quad \text{و} \quad C_3 = -\frac{3 p_0 L^3}{128}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} \quad : \quad EIv = -p_0\left(\frac{x^4}{24} - \frac{L x^3}{16} + \frac{3L^3}{128}\right)$$

$$\frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \quad : \quad EI\,v = -p_0\left(\frac{L x^3}{48} - \frac{L^2 x^2}{16} + \frac{17 L^3}{384}\,x - \frac{L^4}{384}\right)$$



مسئله ۱۱-۱۹



$$0 \leqslant x \leqslant a \; : \quad M(x) = -2Px$$

$$EI\,\frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = -2Px$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -Px^2 + C_3 \quad (1)$$

$$EIv = -\frac{Px^{۳}}{۳} + C_{۳}x + C_{۴} \quad ; \quad v_{x=۰} = ۰ \Rightarrow C_{۴} = ۰$$

$$v_{x=a} = ۰ \Rightarrow -\frac{Pa^{۳}}{۳} + C_{۳}a = ۰ \Rightarrow C_{۳} = \frac{Pa^{۲}}{۳}$$

$$\boxed{EIv = -\frac{Px^{۳}}{۳} + \frac{Pa^{۲}}{۳} ; \quad ۰ \leqslant x \leqslant a}$$

$$a \leqslant x \leqslant ۳a \quad ، \quad M(x) = -(۳a - x)P = -۳aP + Px$$

$$EI\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = M(x) = Px - ۳aP$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{Px^{۲}}{۲} - ۳aPx + A_{۳} \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) باید به‌ازاء $x = a$ برابر باشند لذا:

$$-Pa^{۲} + \frac{Pa^{۲}}{۳} = \frac{Pa^{۲}}{۲} - ۳Pa^{۲} + A_{۳} \Rightarrow A_{۳} = \frac{۱۱}{۶}Pa^{۲}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{Px^{۲}}{۲} - ۳Pax + \frac{۱۱}{۶}Pa^{۲}$$

$$EIv = \frac{Px^{۳}}{۶} - \frac{۳Pax^{۲}}{۲} + \frac{۱۱}{۶}Pa^{۲}x + A_{۴}$$

$$v_{x=a} = ۰ \Rightarrow \frac{Pa^{۳}}{۶} - \frac{۳Pa^{۳}}{۲} + \frac{۱۱Pa^{۳}}{۶} + A_{۴} = ۰ \quad \Rightarrow \quad A_{۴} = -\frac{Pa^{۳}}{۲}$$

$$\therefore \boxed{EIv = \frac{P^{۳}x}{۶} - \frac{۳Pax^{۲}}{۲} + \frac{۱۱Pa^{۲}x}{۶} - \frac{Pa^{۳}}{۲}} ; \quad a \leqslant x \leqslant ۳a$$

۱۱-۲۰. اگر یک تیر طره‌ای با مقاومت خمشی ثابت (شکل ۱۰-۱۳ - ت) همانند مسأله ۱۱-۸ بارگذاری شده باشد، مطلوب است تعیین معادلهٔ منحنی ارتجاعی آن. از افزایش ارتفاع مقطع در انتهای تیر به خاطر نیروی برشی صرف‌نظر نمایید.

$$EI\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = M = -Px$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}bh^{۳} = \frac{۱}{۱۲}b\left(h_{۰}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)^{۳} = \left(\frac{۱}{۱۲}bh_{۰}^{۳}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}} = I_{۰}\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

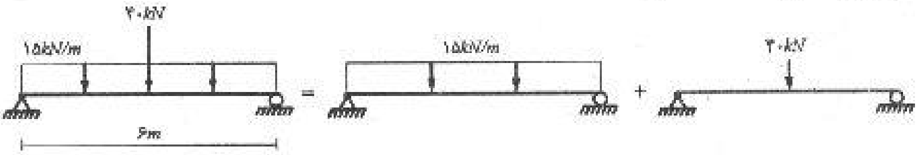
$$EI_{۰}\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = -Px \Rightarrow EI_{۰}\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = \frac{-Px}{\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}} = -PL^{\left(\frac{۳}{۲}\right)}x^{-\left(\frac{۱}{۲}\right)}$$

$$EI_{۰}\frac{dv}{dx} = -۲PL^{\frac{۳}{۲}} \cdot x^{\frac{۱}{۲}} + C_{۱} \quad x = L : \frac{dv}{dx} = ۰ \rightarrow C_{۱} = ۲PL^{۲}$$

$$EI_{۰}v = -\frac{۴}{۳}PL^{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۳}{۲}} + ۲PL^{۲}x + C_{۲} \qquad x = L : v = ۰ \rightarrow C_{۲} = -\frac{۲}{۳}PL^{۳}$$

$$EI_{۰}v = -\frac{۴}{۳}PL^{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۳}{۲}} + ۲PL^{۲}x - \frac{۲}{۳}PL^{۳}$$

۱۱-۲۱. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی و حداکثر تغییر مکان برای یک تیر ساده از نیمرخ IPN۳۶۰ به دهانهٔ ۶ متر که تحت نیروی متمرکز ۴۰ کیلونیوتنی در وسط دهانه و بار گستردهٔ یکنواخت به شدت ۱۵ کیلونیوتن بر متر (شامل وزن خود تیر) قرار داد. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید و از روابط موجود در جدول ۳ ضمیمه و اصل رویهم‌گذاری استفاده نمایید.



مشخصات INP ۳۶۰: $S_x = ۱۰۹۰\ cm^۳$ و $I_x = ۱۹۶۱۰\ cm^۴$.

بدیهی است که حداکثر تغییر مکان در وسط دهانه اتفاق می‌افتد.

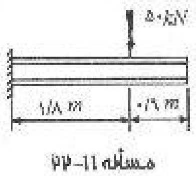
$$\delta_{max} = \delta_۱ + \delta_۲ = \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI} + \frac{PL^۳}{۴۸EI} = \frac{۵ \times ۱۵ \times ۶۰۰۰^۴}{۳۸۴(۲ \times ۱۰^۵)(۱۹۶۱۰ \times ۱۰^۴)}$$

$$+ \frac{(۴۰ \times ۱۰^۳)(۶۰۰۰^۳)}{۴۸(۲ \times ۱۰^۵)(۱۹۶۱۰ \times ۱۰^۴)} = ۶/۴۵ + ۴/۵۹ = ۱۱\ mm$$

$$M_{max} = M_۱ + M_۲ = \frac{qL^۲}{۸} + \frac{PL}{۴} = \frac{۱۵ \times ۶^۲}{۸} + \frac{۴۰ \times ۶}{۴} = ۷۱/۲۵\ kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S_x} = \frac{۷۱/۲۵ \times ۱۰^۶}{۱۰۹۰ \times ۱۰^۳} = ۶۵/۴\ N/mm^۲$$

۱۱-۲۲. یک تیر طره‌ای از نیمرخ IPE۳۳۰ بار متمرکزی مطابق شکل حمل می‌نماید. مطلوب است محاسبهٔ تغییر مکان ناشی از نیروی وارده (الف): در نقطهٔ تأثیر نیرو (ب) در انتهای آزاد. از روابط موجود در جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید (راهنمایی: شیب تیر بین نقطهٔ تأثیر نیرو و انتهای تیر ثابت می‌باشد)



مسئله ۱۱-۲۲

$$v = \frac{Px^۲}{۶EI}(۳a - x)\ ،\ v' = \frac{Px}{۲EI}(۲a - x) \quad ۰ \leqslant x \leqslant a$$

بنابراین:

در نقطهٔ اثر نیرو $v_{x=a} = \frac{Pa^۳}{۳EI} \Rightarrow v_{a=۱/۸} = \frac{(۵۰ \times ۱۰^۳)(۱۸۰۰^۳)}{۳(۲ \times ۱۰^۵)(۱۱۷۷۰ \times ۱۰^۴)} = ۴/۱\ mm$

$$v'_{x=a} = \frac{Pa^۲}{۲EI} \Rightarrow \theta_{a=۱/۸} = \frac{(۵۰ \times ۱۰^۳)(۱۸۰۰^۲)}{۲(۲ \times ۱۰^۵)(۱۱۷۷۰ \times ۱۰^۴)} = ۳/۴۴ \times ۱۰^{-۳}\ rad$$

تغییر مکان انتهای آزاد:

$$v_{x=۲/۷} = v_{۱/۸} + ۹۰۰\theta_{۱/۸} = ۴/۱ + ۹۰۰(۳/۴۴ \times ۱۰^{-۳}) = ۴/۱ + ۳/۱ = ۷/۲mm$$

۱۱-۲۳. حداکثر تغییر مکان برای یک تیر ساده به دهانهٔ ۸ متر که بار گستردهٔ یکنواختی به میزان ۶۲/۵ کیلونیوتن بر متر را حمل می‌نماید، به ۱۵ میلی‌متر محدود شده است. (الف) یک نیمرخ IPE مناسب برای این تیر انتخاب نمایید. (ب) حداکثر تنش ایجاد شده در تارهای خارجی مقطع را به دست آورید. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

الف)

$$\delta_{max} = \frac{۵qL^{۴}}{۳۸۴EI_x} \Rightarrow I_{min} = \frac{۵qL^{۴}}{۳۸۴E\delta_{max}} = \frac{۵(۶۲/۵)(۸۰۰۰^{۴})}{۳۸۴(۲\times۱۰^{۵})\,(۱۵)} \times ۱۰^{-۴} = ۱۱۱۱۱۱Cm^{۴}$$

بنابراین از دو نیمرخ $IPE\ ۵۵۰$ با $I_x = ۲\times ۶۷۱۲۰\,cm^{۴}$ استفاده می‌کنیم.

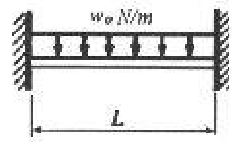
$$\delta_{max} = \frac{۵(۶۲/۵)(۸۰۰۰^{۴})}{۳۸۴(۲\times۱۰^{۵})\,(۲\times۶۷۱۲۰\times۱۰^{۴})} = ۱۲/۴\,mm < ۱۵\,mm$$

ب)

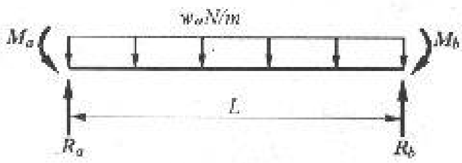
$$M_{max} = \frac{qL^{۲}}{۸} = ۶۲/۵ \times \frac{۸^{۲}}{۸} = ۵۰۰\,kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S_x} = \frac{Mc}{I_x} = \frac{(۵۰۰\times۱۰^{۶})(۵۵۰/۲)}{۲\times۶۷۱۲۰\times۱۰^{۴}} = ۱۰/۲۴\,N/mm^{۲}$$

۱۱-۲۴ تا ۱۱-۲۶. مطلوب است تعیین منحنی ارتجاعی برای تیرهای نامعین نشان داده شده در شکل EI. تمام تیرها ثابت می‌باشد.



مسئله ۱۱-۲۴



بدلیل تقارن $R_a = R_b = \frac{w_\circ L}{۲}$ و $M_a = M_b$ بنابراین کافی است تا مقدار M_a را محاسبه نمائیم.

$$q(x) = -w_\circ$$

$$EI\frac{d^{۴}v}{dx^{۴}} = q(x) = -w_\circ$$

$$EI\frac{d^{۳}v}{dx^{۳}} = -w_\circ x + C_۱ \quad : \quad V_{x=\circ} = \frac{w_\circ L}{۲} \Rightarrow C_۱ = \frac{w_\circ L}{۲}$$

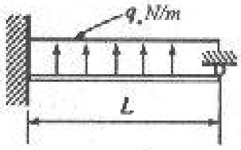
$$EI\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = -\frac{w_\circ x^{۲}}{۲} + \frac{w_\circ Lx}{۲} + C_۲ \quad : \quad M_{x=\circ} = -M_a \Rightarrow C_۲ = -M_a$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_\circ x^{۳}}{۶} + \frac{w_\circ Lx^{۲}}{۴} - M_a x + C_۳ = \circ \quad : \quad \theta_{x=\circ} = \circ \Rightarrow C_۳ = \circ$$

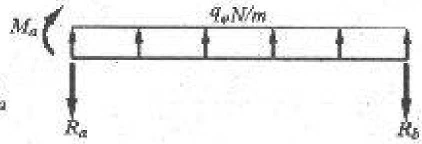
$$EIv = -\frac{w_0 x^4}{24} + \frac{w_0 L x^3}{12} - \frac{M_a x^2}{2} + C_4 = 0 \quad : \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

از طرفی $\quad v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{w_0 L^4}{24} + \frac{w_0 L^4}{12} - \frac{M_a L^2}{2} = 0 \Rightarrow M_a = \frac{w_0 L^2}{12}$

$$\therefore \boxed{EIv = -\frac{w_0 x^4}{24} + \frac{w_0 L x^3}{12} - \frac{w_0 L^2 x^2}{24}}$$



مسئله ۱۱-۲۵



$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q_0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = q_0 x + C_1 \quad ، \quad V_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = -R_a$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q_0 x^2}{2} - R_a x + C_2 : \quad M_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{q_0 L^2}{2} - R_a L + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = R_a L - \frac{q_0 L^2}{2}$$

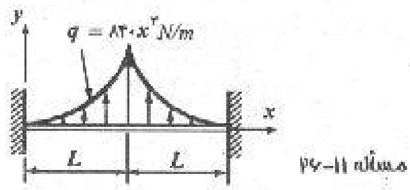
$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q_0 x^3}{6} - \frac{R_a x^2}{2} + R_a L x - \frac{q_0 L^2}{2}x + C_3 \quad : \quad \theta_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EIv = \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{R_a x^3}{6} + \frac{R_a L x^2}{2} - \frac{q_0 L^2 x^2}{4} + C_4 \quad : \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

از طرفی $\quad v_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{q_0 L^4}{24} - \frac{R_a L^3}{6} + \frac{R_a L^3}{2} - \frac{q_0 L^4}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} R_a L^3 = \frac{5}{24} q_0 L^4$

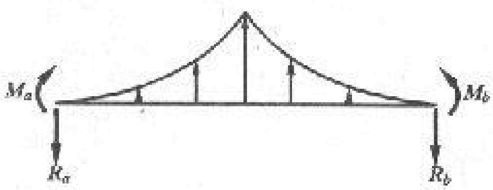
$$\Rightarrow R_a = \frac{5}{8} q_0 L$$

$$\therefore \boxed{EIv = \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{5 q_0 L x^3}{48} + \frac{q_0 L^2 x^2}{16}}$$



مسئله ۱۱-۲۶

بدلیل تقارن: $\quad M_a = M_b$ و $R_a = R_b$



$0 \leqslant x \leqslant L \quad ، \quad q(x) = 840x^3$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 840x^3$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = 210x^4 + C_1 : \quad V_{x=0} = -R_a \Rightarrow C_1 = -R_a$$

از طرفی، $V_{x=L}=0$ بعلت تقارن : $210L^4 - R_a = 0 \Rightarrow R_a = 210L^4$

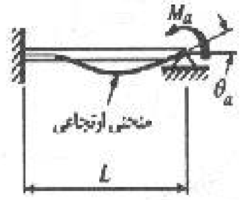
$EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = 42x^5 - 210L^4x + C_2 \quad : \quad M_{x=0} = M_a \Rightarrow C_2 = M_a$

$EI\dfrac{dv}{dx} = 7x^6 - 105L^4x^2 + M_a x + C_3; \quad \theta_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

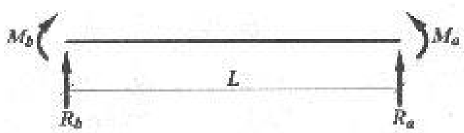
از طرفی، $\theta_{x=L} = 0$ بعلت تقارن، $7L^6 - 105L^6 + M_a L = 0 \Rightarrow M_a = 98L^5$

$\therefore \boxed{EIv = x^7 - 35L^4x^3 + 49L^5x^2}$

۱۱-۲۷. برای تیر نشان داده شده در شکل پس از تعیین معادلهٔ منحنی ارتجاعی، مطلوب است.
(الف) نسبت لنگر خمشی موجود در انتهای گیردار به لنگر M_a (ب) دوران انتهای آزاد. EI تیر ثابت می‌باشد.



مسأله ۱۱-۲۷



فرض می‌کنیم مقدار R_b معلوم باشد.

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = +R_b$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow M_b = M_a - R_a.L = M_a - R_b.L$

$$M(x) = M_b + R_b x = M_a - R_b.L + R_b.x$$

$EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = M(x) = (M_a - R_bL) + R_bx$

$EI\dfrac{dv}{dx} = (M_a - R_bL)\,x + R_b\dfrac{x^2}{2} + C_3 \quad , \qquad \theta_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$EIv = (M_a - R_bL)\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{R_bx^3}{6} + C_4 : \qquad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

از طرفی، $v_{x=L} = 0 \Rightarrow (M_a - R_bL)\dfrac{L^2}{2} + R_b\dfrac{L^3}{6} = 0 \Rightarrow R_b = \dfrac{3}{2}\dfrac{M_a}{L}$

$\therefore\ EIv = \left(M_a - \dfrac{3}{2}M_a\right)\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}\dfrac{M_a}{L}\dfrac{x^3}{6}$

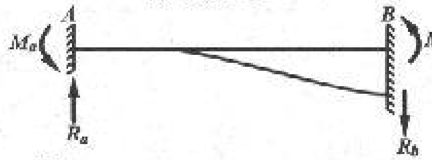
$EIv = -\dfrac{M_a}{4}\left(x^2 - \dfrac{x^3}{L}\right)$

$EI\theta = -\dfrac{M_a}{4}\left(2x - 3\dfrac{x^2}{L}\right) \Rightarrow \theta_{x=L} = -\dfrac{M_a}{4EI}(2L - 3L) \Rightarrow \boxed{\theta_{x=L} = \dfrac{M_aL}{4EI}}$

$EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = -\dfrac{M_a}{4}\left(2 - \dfrac{6x}{L}\right) \Rightarrow M_{x=0} = M_b = -\dfrac{M_a}{2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{M_b}{M_a} = -\dfrac{1}{2}}$

۱۱-۲۸. یکی از تکیه‌گاههای یک تیر دو سر گیردار، نسبت به تکیه‌گاه دیگر به اندازهٔ Δ نشست کرده است. از چرخش دو انتهای تیر جلوگیری شده است. مطلوب است تعیین معادلهٔ منحنی ارتجاعی تیر و رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی. EI تیر ثابت می‌باشد.

مسئله ۱۱-۲۸



$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = R_b$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_a = R_b \,.\, L - M_b$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1 \,,\quad V_{x=0} = R_a \Rightarrow C_1 = R_a$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = R_a x + C_2 \;;\quad M_{x=0} = -M_a \Rightarrow C_2 = -M_a$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{R_a x^2}{2} - M_a x + C_3 \,,\quad \theta_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\theta_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{R_a L^2}{2} - M_a L = 0 \Rightarrow M_a = \frac{R_a L}{2} \quad (1)$$

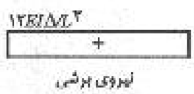
$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{R_a x^2}{2} - \frac{R_a L x}{2}$$

$$EIv = \frac{R_a x^3}{6} - \frac{R_a L x^2}{4} + C_4 \;;\quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

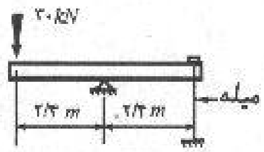
$$v_{x=L} = -\Delta \Rightarrow \frac{R_a L^3}{6} - \frac{R_a L^3}{4} = -EI\Delta \Rightarrow R_a = +\frac{12EI\Delta}{L^3}$$

$$(1) \Rightarrow M_a = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$\therefore \boxed{v = +\frac{2\Delta x^3}{L^3} - \frac{3\Delta x^2}{L^2}}$$



۱۱-۲۹. یک تیر از نیمرخ $IPE300$ مطابق شکل بارگذاری شده است. تکیه‌گاه میله‌ای سمت راست از میلهٔ فولادی به قطر ۲۴ میلی‌متر و به طول ۲/۴ متر تشکیل شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای چپ تیر در اثر نیروی متمرکز ۳۰ کیلونیوتنی. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۱-۲۹

ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه سمت راست یک تکیه‌گاه مفصلی باشد. با این فرض تغییر مکان سمت چپ را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به معادلات تعادل داریم:

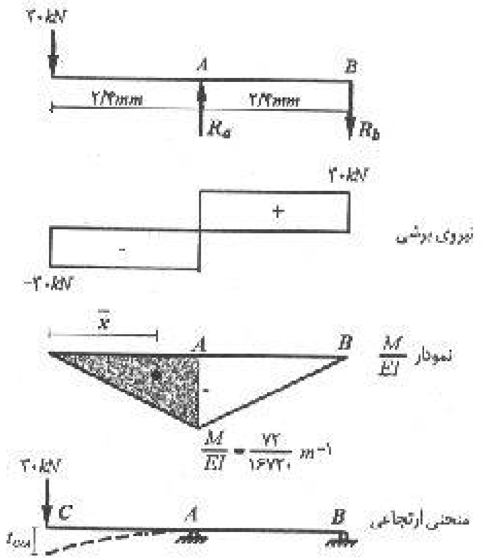
$R_b = ۳۰\,kN$ و $R_a = ۶۰\,kN$

$$EI = ۲ \times ۱۰^{۵} \times ۸۳۶۰ \times ۱۰^{۴} = ۱۶۷۲ \times ۱۰^{۱۰}\,Nmm^{۲} = ۱۶۷۲۰\,kNm^{۲}$$

با توجه به منحنی الاستیک داریم : $\delta_c = t_c/A$ بنابراین:

$$\delta_c = t_c/A = \int_c^A \bar{x}\,\frac{M}{EI}\,dx = \left(\frac{۲}{۳} \times ۲/۴\right) \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۲/۴ \times \frac{۷۲}{۶۷۲۰}\right)$$

$\therefore\ \delta_c = ۰/۰۲m = ۲۰\,mm$ به سمت پایین



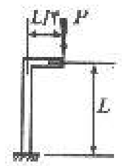
حال با توجه به اینکه تکیه‌گاه B به‌صورت میله است، به اندازهٔ $\Delta L = \frac{PL}{AE}$ در اثر واکنش $۳۰\,kN$ به سمت بالا تغییر مکان خواهد داد که این امر باعث تغییر مکان نقطهٔ c به همان میزان به طرف پایین می‌شود لذا:

$$\delta_B = \delta_c = \frac{PL}{AE} = \frac{۳۰ \times ۱۰^{۳} \times ۲۴۰۰}{\left(\pi \times \frac{۲۴^{۲}}{۴}\right)(۲ \times ۱۰^{۵})} = ۰/۸\,mm$$

کل تغییر مکان انتهای چپ (به‌سمت پایین):

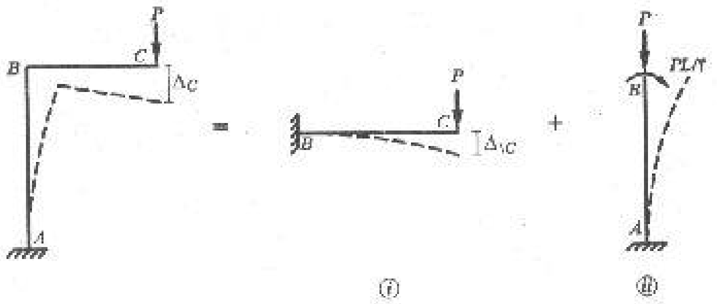
$\therefore\ v_c = ۲۰ + ۰/۸ = ۲۰/۸\,mm$

۱۱-۳۰. مطلوب است تعیین تغییر مکان قائم تاب نشان داده شده در شکل در نقطهٔ اثر نیرو. EI تیر و ستون ثابت و مساوی می‌باشند. از تغییر شکلهای محوری صرف‌نظر نمایید. نتایج را برحسب P، L، E و I بیان نمایید (راهنمایی: از نتایج مثال ۱۱-۲ و روابط جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید).



مسئله ۱۱-۳۰

تغییر مکان نقطهٔ C ناشی از تغییر مکان عضو افقی BC و عضو قائم AB می‌باشد.



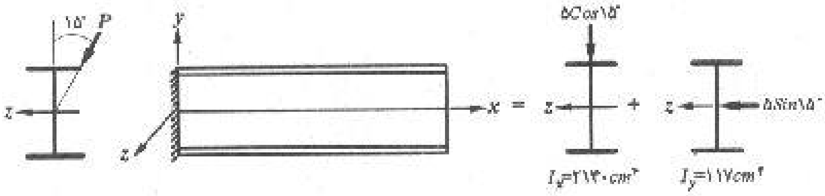
$$(i):\ \Delta_{1C} = |v_{max}| = |v_c| = \frac{PL_1^{۳}}{۳EI} = \frac{P\left(\frac{L}{۴}\right)^{۳}}{۳EI} = \frac{PL^{۳}}{۱۹۲EI}$$

$$(ii):\ |\theta_B| = \frac{ML_1}{EI} = \frac{PL}{۴EI}.L = \frac{PL^{۲}}{۴EI} \Rightarrow \Delta_{2C} = \theta_B \times \frac{L}{۴} = \frac{PL^{۲}}{۴EI}.\frac{L}{۴} = \frac{PL^{۳}}{۱۶EI}$$

تغییر مکان نقطهٔ C : $\Delta_C = \Delta_{1C} + \Delta_{2C} = \frac{PL^{۳}}{۱۹۲EI} + \frac{PL^{۳}}{۱۶EI} = \frac{۱۳PL^{۳}}{۱۹۲EI}$ به‌سمت پایین

۱۱-۳۱. مطلوب تعیین تغییر مکان انتهای آزاد یک تیر طره‌ای از نیمرخ INP ۲۰۰ بـه‌دهانهٔ ۲ متر در اثر نیروی متمرکز مایل ۵ کیلونیوتنی که مطابق شکل به انتهای آزاد آن اثر می‌کند.

مسئله ۱۱-۳۱



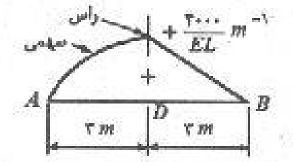
$$|v_{max}|_1 = \frac{PL^{۳}}{۳EI_x} = \frac{(۵\cos ۱۵ \times ۱۰^{۳})(۲ \times ۱۰^{۳})^{۳}}{۳(۲ \times ۱۰^{۵})(۲۱۴۰ \times ۱۰^{۴})} = ۳mm \qquad \text{در صفحهٔ } xy$$

$$|v_{max}|_2 = \frac{PL^{۳}}{۳EI_y} = \frac{(۵\sin ۱۵ \times ۱۰^{۳})(۲ \times ۱۰^{۳})^{۳}}{۳(۲ \times ۱۰^{۵})(۱۱۷ \times ۱۰^{۴})} = ۱۴/۷mm \qquad \text{در صفحهٔ } xz$$

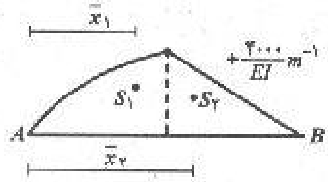
$$\vec{v}_{max} = -|v_{max}|_1\vec{j} + |v_{max}|_2\vec{k} = -۳\vec{j} + ۱۴/۷\vec{k}$$

$$|v_{max}| = \sqrt{۳^{۲} + ۱۴/۷^{۲}} = ۱۵mm$$

۱۱-۳۲. ترسیمهٔ تغییرات M/EI برای یک تیر ساده مطابق شکل می‌باشد. منحنی ارتجاعی کیفی آن را رسم نمائید و $t_{A/B}$ و $\theta_{A/B}$ را محاسبه کنید.



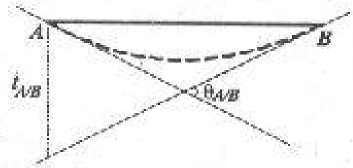
مسئله ۱۱-۳۲



$$t_{A/B} = \int_A^B \bar{x}\,\frac{M}{EI}\,dx = \bar{x}_۱ S_۱ + \bar{x}_۲ S_۲$$

$$= \left(\frac{۵}{۸}\times ۳\right)\left(\frac{۲}{۳}\times ۳\times \frac{۴۰۰۰}{EI}\right) + \left(۳+\frac{۱}{۳}\times ۳\right)$$

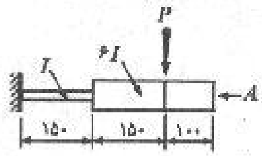
$$\times \left(\frac{۱}{۲}\times ۳\times \frac{۴۰۰۰}{EI}\right) = \frac{۳۹۰۰۰}{EI}$$



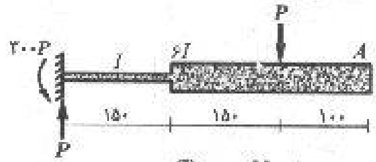
$$\theta_{A/B} = \int_B^A \frac{M}{EI}\,dx = S_۱ + S_۲ = \frac{۲}{۳}\times ۳\times \frac{۴۰۰۰}{EI}$$

$$+ \frac{۱}{۲}\times ۳\times \frac{۴۰۰۰}{EI} = \frac{۱۴۰۰۰}{EI}$$

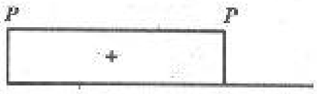
۱۱-۳۳ تا ۱۱-۴۷. با استفاده از روش تیر فرضی، تغییر مکان و شیب نقطهٔ A را در تیرهای نشان داده شده در شکل محاسبه نمایید. مشخص کنید که تغییر مکان به سمت بالاست یا پایین. اگر لنگر ماند مقطع تیرها داده نشده باشد، EI را ثابت فرض کنید. از وزن اعضا صرف‌نظر نمایید. در صورت لزوم، E را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع، فرض کنید.



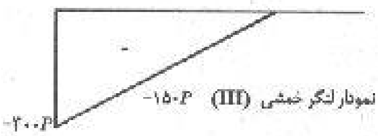
مسئله ۱۱-۳۳



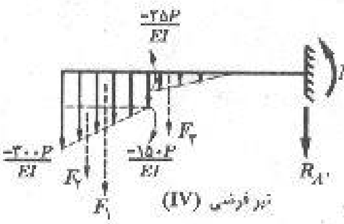
تیر حقیقی (I)



نمودار نیروی برشی (II)



نمودار لنگر خمشی (III)



تیر فرضی (IV)

ابتدا عکس‌العمل‌های تیر حقیقی را محاسبه نموده، سپس نمودار لنگر خمشی را ترسیم می‌نمائیم (اشکال I، II، III). حال تیر فرضی را با توجه به اینکه تکیه‌گاه گیردار به آزاد و سرِ آزاد به تکیه‌گاه گیردار تبدیل می‌شود، تحت بار الاستیک $\frac{M}{EI}$ قرار می‌دهیم (شکل IV):

$$F_۱ = \frac{۱۵۰P}{EI}\,(۱۵۰) = \frac{۲۲۵۰۰P}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳۰۰P - ۱۵۰P}{EI}\right)(۱۵۰)$$

$$= \frac{۱۱۲۵۰P}{EI}$$

$$F_۳ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۵P}{EI}\right)(۱۵۰) = \frac{۱۸۷۵P}{EI}$$

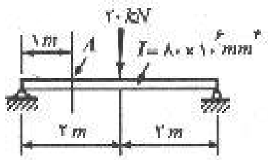
$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow \theta_{A'} = R_{A'} = -(F_۱ + F_۲ + F_۳)$$

$$\theta_{A'} = -\frac{۳۵۶۲۵P}{EI}$$ رادیان

$$\uparrow^{+} \sum M_{A'} = ۰ \Rightarrow \quad \delta_{A'} = M_{A'} = -\Big[F_۱\Big(۱۰۰ + ۱۵۰ + \frac{۱۵۰}{۲}\Big)$$

$$+ F_۲\Big(۱۰۰ + ۱۵۰ + \frac{۲}{۳}(۱۵۰)\Big) + F_۳\Big(۱۰۰ + \frac{۲}{۳}(۱۵۰)\Big)\Big]$$

$$\Rightarrow \delta_{A'} = -\frac{۳۷۵۰۰۰P}{EI}$$ تغییر مکان به‌سمت پایین



مسأله ۱۱-۳۴

تیر فرضی: $\sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow ۴(۱۰^۳)\,R_{b'}$

$$= \frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{۴E}\Big)(۴ \times ۱۰^۳)(۲ \times ۱۰^۳)$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{۱۰^۳}{۴E} \downarrow$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{a'} = \frac{۱۰^۳}{۴E} \downarrow$$

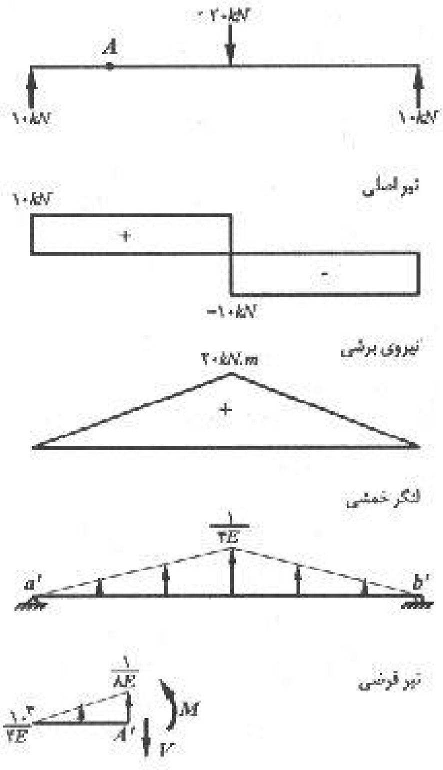
$$\theta_{A'} = V_{A'} = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{۸E}\Big)(۱ \times ۱۰^۳) - \frac{۱۰^۳}{۴E}$$

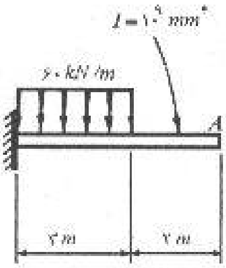
$$= -\frac{۳ \times ۱۰^۳}{۱۶E} = -۹/۳۷۵ \times ۱۰^{-۳}$$ رادیان

$$\delta_{A'} = M_{A'} = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{۸E}\Big)(۱ \times ۱۰^۳)\Big(\frac{۱}{۳} \times ۱۰^۳\Big)$$

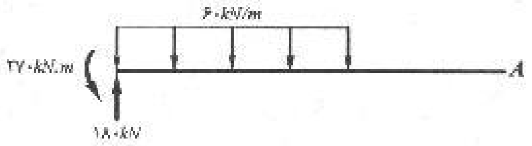
$$- \frac{۱۰^۳}{۴E}(۱۰^۳) = -\frac{۱۱(۱۰^۶)}{۴۸E}$$

$= -۱/۱۵mm$ به سمت پایین





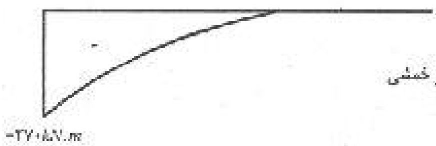
مسأله ۱۱-۳۵



تیر اصلی

نیروی برشی

$$\text{تیر فرضی}: F_1 = \frac{1}{3}(3\times 10^3)\left(\frac{0/27}{E}\right) = \frac{270}{E}$$



لنگر خمشی

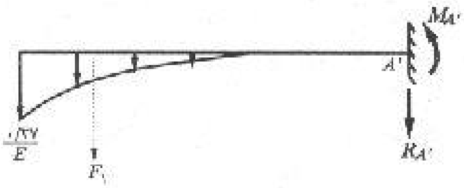
$$+\!\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = R_{A'} = -\frac{270}{E}$$

$$= -0/00135 \quad \text{رادیان}$$

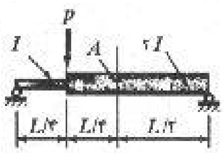
$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \quad \delta_{A'} = M_{A'}$$

$$= -\frac{270}{E}\times\left[3\times 10^3 + \frac{3}{4}(3)(10)^3\right]$$

$$= -5/7\,mm \quad \text{بسمت پایین}$$



تیر فرضی



مسأله ۱۱-۳۶

$$\text{تیر فرضی}: \overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow R_b L = F_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{4}\right) + F_2\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\right)$$

$$R_{b'}L = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\right]\left(\frac{L}{6}\right) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{32}\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{3L}{4}\right)\right]\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$R_{b'} = \frac{1}{256}\frac{PL^2}{EI} + \frac{9}{512}\frac{PL^2}{EI} = \frac{11}{512}\frac{PL^2}{EI}\downarrow$$

قطعه $A'b'$: $+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'}$

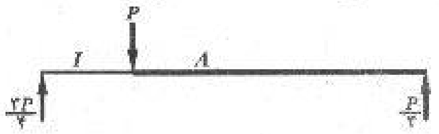
$$= \frac{11}{512}\frac{PL^2}{EI} - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{64}\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\theta_{A'} = -\frac{7}{512}\frac{PL^2}{EI}$$

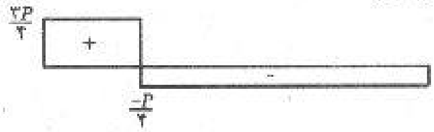
$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{64}\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right) - \frac{11}{512}\frac{PL^2}{EI}\left(\frac{L}{2}\right)$$

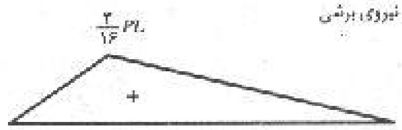
$$\delta_{A'} = \frac{3PL^3}{512EI} - \frac{11PL^3}{1024EI} = -\frac{5PL^3}{1024EI}$$



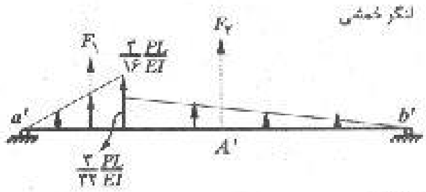
تیر اصلی



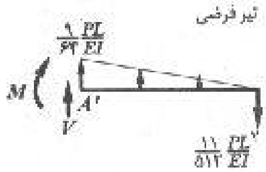
نیروی برشی

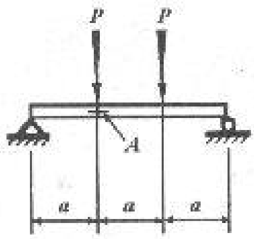


لنگر خمشی



تیر فرضی





مسئله ۱۱-۳۷

قطعهٔ $a'A'$: $+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'}$

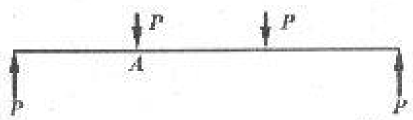
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{EI}\,.\,a\right) - \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_{A'} = -\frac{Pa}{EI}$$

$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'}$

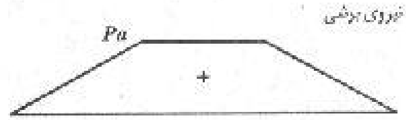
$$= \frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}\,.\,a\,.\,\frac{a}{3} - \frac{Pa^2}{EI}\,.\,a$$

$$\delta_{A'} = -\frac{5Pa^3}{6EI}$$

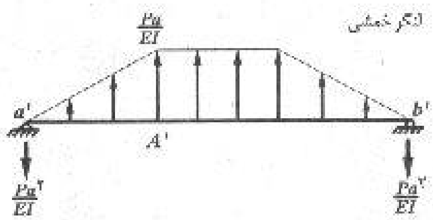


تیر اصلی

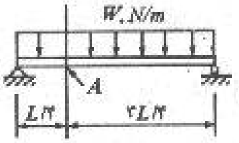
نیروی برشی



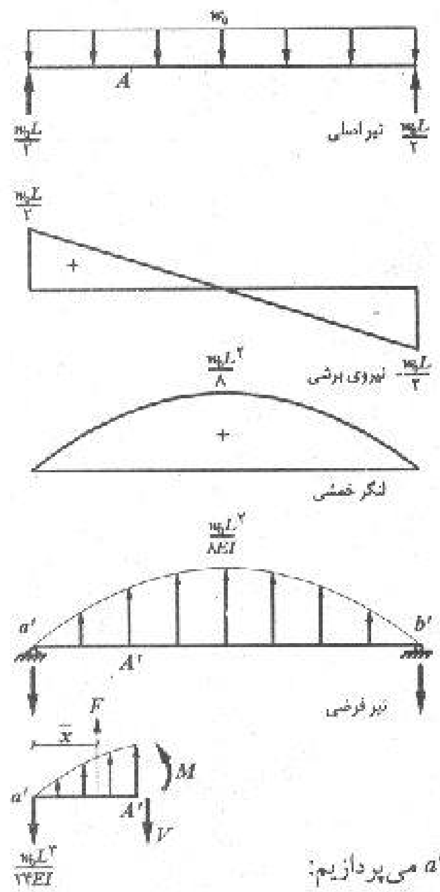
لنگر خمشی



تیر فرضی



مسئله ۱۱-۳۸



تیر فرضی : $R_{a'} = R_{b'} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}L \cdot \frac{w_0 L^2}{8EI}\right)$

$$= \frac{w_0 L^3}{24EI}$$

توضیح: می‌دانیم معادلهٔ لنگه در تیر اصلی به شکل زیر می‌باشد:

$$M_x = \frac{w_0 L}{2}x - \frac{w_0}{2}x^2$$

از تقسیم رابطهٔ فوق بر EI معادله بار الاستیک حاصل می‌شود:

$$q_x = \frac{w_0 L}{2EI}x - \frac{w_0}{2EI}x^2 = \frac{w_0}{2EI}(Lx - x^2)$$

حال به تعیین مقادیر $V_{A'}$ و $M_{A'}$ برای قطعهٔ $a'A'$ می‌پردازیم:

$$F = \int_0^{L/4} q_x\,dx = \frac{w_0}{2EI}\int_0^{L/4}(Lx - x^2)dx = \frac{w_0}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{L/4} \quad \therefore F = \frac{5}{384}\frac{w_0 L^3}{EI}$$

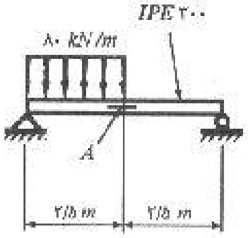
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'} = \frac{5}{384}\frac{w_0 L^3}{EI} - \frac{w_0 L^3}{24EI} = \frac{-11}{384}\frac{w_0 L^3}{EI}$$ رادیان

$$\bar{x}.F = \int x\,dA = \int_0^{L/4} x\left(\frac{w_0}{2EI}(Lx - x^2)\right)dx = \frac{w_0}{2EI}\int_0^{L/4}(Lx^2 - x^3)\,dx = \frac{w_0}{2EI}\left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{L/4}$$

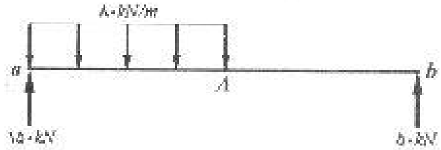
$$\bar{x}\,.\,F = \frac{w_0}{2EI}\left(\frac{13}{3072}L^4\right) \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{w_0}{2EI}\left(\frac{13}{3072}L^4\right)}{\frac{5}{384}\cdot\frac{w_0 L^3}{EI}} = \frac{13 \times 384}{5 \times 2 \times 3072} = \frac{13}{80}L$$

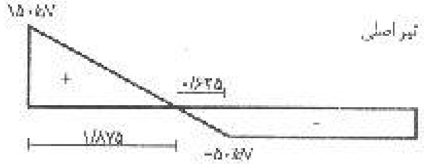
$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} = F\left(\frac{L}{4} - \bar{x}\right) - R_{a'}\frac{L}{4} = \frac{5}{384}\frac{w_0 L^3}{EI}\left(\frac{7}{80}L\right) - \frac{w_0 L^3}{24EI}\cdot\frac{L}{4}$$

$$\delta_{A'} = \frac{-19}{2048}\frac{w_0 L^4}{EI}$$ بسمت پایین



مسئله ۱۱-۳۹

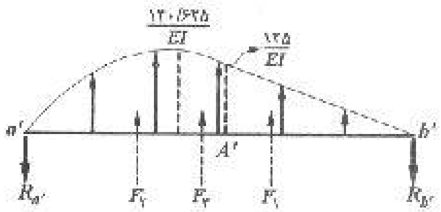




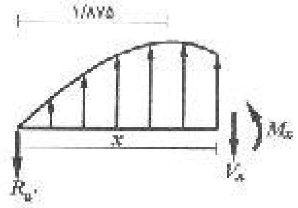
تیر اصلی

نیروی برشی

لنگر خمشی



تیر فرضی



$$F_۱ = \frac{۱}{۲}(۲/۵)\left(\frac{۱۲۵}{EI}\right) = \frac{۱۵۶/۲۵}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۲}{۳}(۱/۸۷۵)\left(\frac{۱۴۰/۶۲۵}{EI}\right) = \frac{۱۷۵/۷۸}{EI}$$

$$F_۳ = ۰/۶۲۵\left(\frac{۱۲۵}{EI}\right) = \frac{۷۸/۱۲۵}{EI}$$

$$F_۴ = \frac{۲}{۳}(۰/۶۲۵)\left(\frac{۱۴۰/۶۲۵ - ۱۲۵}{EI}\right) = \frac{۶/۵۱}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow R_{b'}(۵) = F_۱\left(۲/۵ + \frac{۲/۵}{۳}\right) + F_۲\left(\frac{۵}{۸} \times ۱/۸۷۵\right) + F_۳\left(۱/۸۷۵ + \frac{۰/۶۲۵}{۲}\right) + F_۴\left(۱/۸۷۵ + \frac{۳}{۸}(۰/۶۲۵)\right)$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{۱۸۳/۳}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{۲۳۴/۴}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = ۰ \Rightarrow M_x = -R_{a'}\, x + F_۲\left(x - \frac{۵}{۸}(۱/۸۷۵)\right) + \left(\frac{۱۴۰/۶۲۵ + ۱۲۵}{۲EI}\right) \times \frac{(x - ۱/۸۷۵)^۲}{۲}$$

توضیح: بار الاستیک سهمی شکل در ناحیه $۲/۵ \geqslant x > ۱/۸۷۵$ با تقریب به‌صورت یکنواخت فرض گردیده است، لذا عبارت سوم سمت راست معادلهٔ اخیر با این تقریب محاسبه شده است:

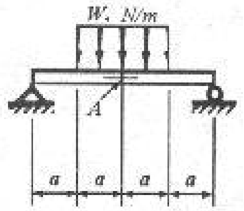
$$\therefore M_x = -R_{a'}\, x + F_۲(x - ۱/۱۷۲) + ۶۶/۴\, \frac{(x - ۱/۸۷۵)^۲}{EI}$$

$$\frac{dM}{dx} = ۰ \Rightarrow -R_{a'} + F_۲ + ۱۳۲/۸\,\frac{(x - ۱/۸۷۵)}{EI} = ۰$$

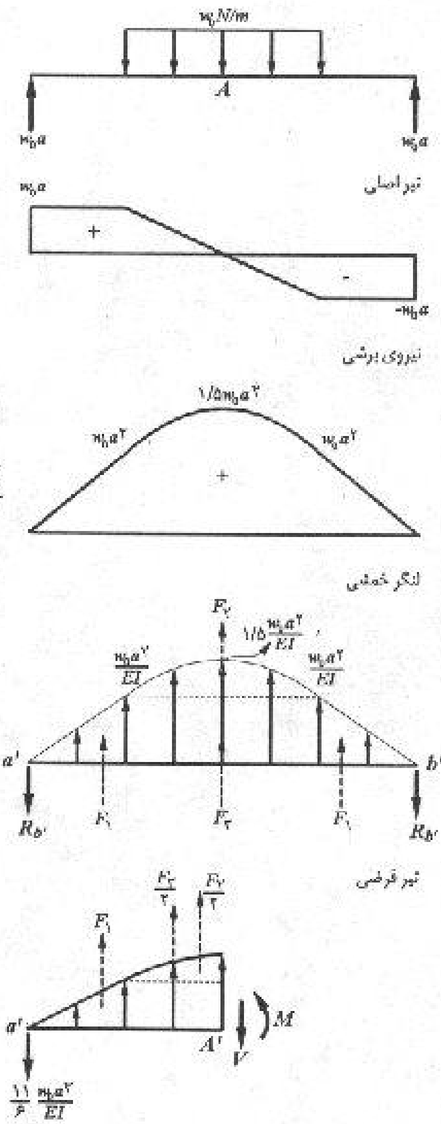
$$\Rightarrow -۲۳۴/۴ + ۱۷۵/۷۸ + ۱۳۲/۸(x - ۱/۸۷۵) = ۰ \Rightarrow x = ۲/۳۲\,m$$

$$\delta_{max} = M_{x=۲/۳۲} = -R_{a'}\,(۲/۳۲) + F_۲(۲/۳۲ - ۱/۱۷۲) + \frac{۶۶/۴(۲/۳۲ - ۱/۸۷)^۲}{EI}$$

$= \dfrac{-۳۲۸/۶}{EI}$ به طرف پایین



مسأله ۱۱-۴۰



$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{w_۰a^۲}{EI}\right)(a) = \frac{۱}{۲}\,\frac{w_۰a^۳}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۲}{۳}\left(۰/۵\,\frac{w_۰a^۲}{EI}\right)(۲a) = \frac{۲}{۳}\,\frac{w_۰a^۳}{EI}$$

$$F_۳ = \left(\frac{w_۰a^۲}{EI}\right)(۲a) = \frac{۲w_۰a^۳}{EI}$$

$$R_{a'} = R_{b'} = \frac{۲F_۱ + F_۲ + F_۳}{۲} = \frac{۱۱}{۶}\,\frac{w_۰a^۳}{EI}$$

قطعه $a'A'$: $+\!\uparrow \sum F_y = ۰$

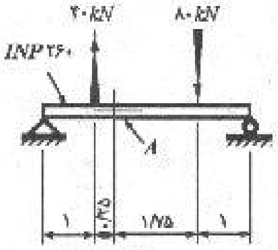
$$\theta_{A'} = V_{A'} = F_۱ + \frac{F_۲}{۲} + \frac{F_۳}{۲} - R_{a'} = ۰$$

$$+\circlearrowleft\ \sum M_{A'} = ۰$$

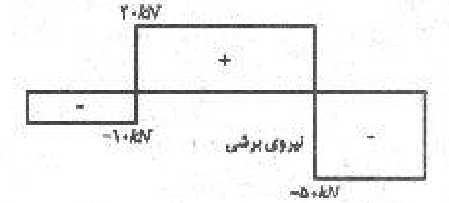
$$\delta_{A'} = M_{A'} = F_۱\left(a + \frac{a}{۳}\right) + \frac{F_۲}{۲}\left(\frac{۳}{۸}\,a\right)$$

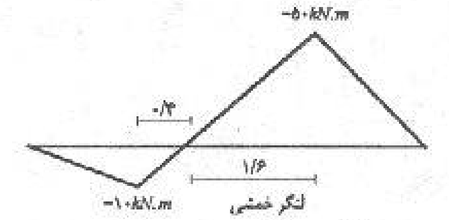
$$+ \frac{F_۳}{۲}\left(\frac{a}{۲}\right) - R_{a'}\,(۲a)$$

$= -\dfrac{۵۷}{۲۴}\,\dfrac{w_۰a^۳}{EI}$ به‌سمت پایین



مسأله ۱۱-۴۱





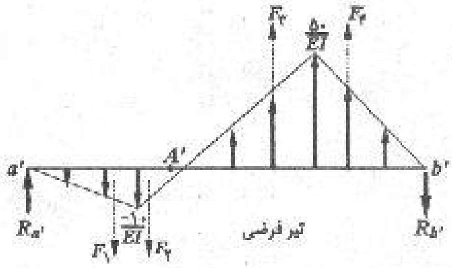
تیر فرضی:

$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۱) = \frac{۵}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۰/۴) = \frac{۱}{EI}$$

$$F_۳ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵۰}{EI}\right)(۱/۶) = \frac{۴۰}{EI}$$

$$F_۴ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵۰}{EI}\right)(۱) = \frac{۲۵}{EI}$$



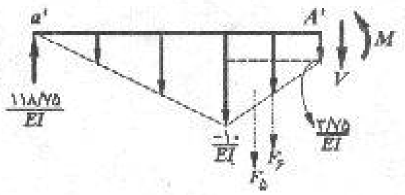
$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow ۴R_{b'} =$$

$$F_۳\left(۱ + ۰/۴ + \frac{۲}{۳}(۱/۶)\right) + F_۴\left(۴ - \frac{۲}{۳}(۱)\right)$$

$$- F_۱\left(\frac{۲}{۳}(۱)\right) - F_۲\left(۱ + \frac{۱}{۳}(۰/۴)\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴R_{b'} = ۲/۴۷F_۳ + ۳/۳۳F_۴ - ۰/۶۷F - ۱/۱۳F_۲$$

$$R_{b'} = \frac{۱۷۷/۵۷}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{۱۱۸/۵۷}{EI} \uparrow$$



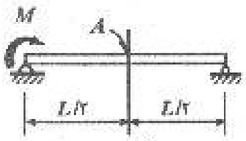
$a'A'$ قطعه: $F_۱ = \frac{۵}{EI}$

$$F_۵ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۰/۲۵) = \frac{۱/۲۵}{EI} \qquad F_۶ = ۰/۲۵\left(\frac{۳/۷۵}{EI}\right) = \frac{۰/۹۴}{EI}$$

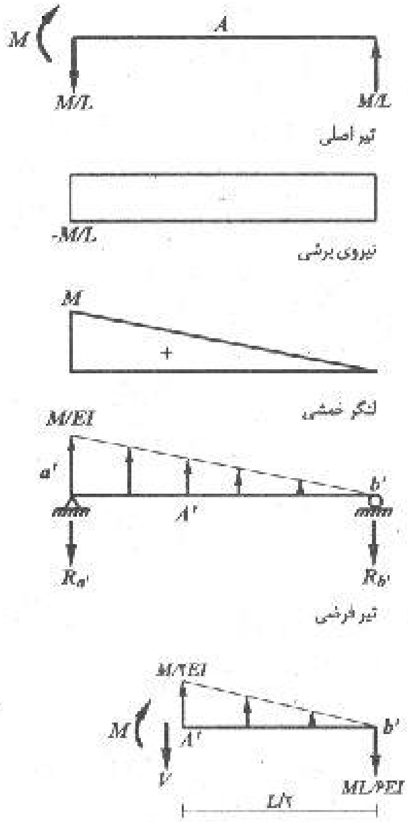
$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'} = \frac{۱۱۸/۵۷}{EI} - \frac{۱/۲۵}{EI} - \frac{۰/۹۴}{EI} = \frac{۱۱۶/۳۸}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = ۰ \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} = \left(\frac{۱۱۸/۵۷}{EI}\right)(۱/۲۵) - \left(\frac{۱۰}{EI}\right)\left(۰/۲۵ + \frac{۱}{۳}\right)$$

$$- \left(\frac{۱/۲۵}{EI}\right) \times \left(\frac{۲}{۳}(۰/۲۵)\right) - \left(\frac{۰/۹۴}{EI}\right)\left(\frac{۰/۲۵}{۲}\right) = \frac{۱۴۱/۶۴}{EI}$$



مسئله ۱۱-۴۲



$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = 0 :$$

$$R_{b'} \cdot L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI} \cdot L\right)\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{ML}{EI}$$

$$\Rightarrow\ R_{a'} = \frac{1}{3}\,\frac{ML}{EI}$$

قطعهٔ $a'b'$ $+\uparrow \sum F_y = 0 :$

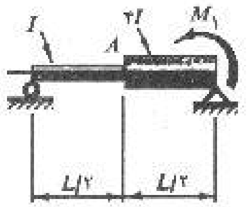
$$\theta_A = V_{A'} = \frac{ML}{6EI} - \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2EI} \cdot \frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \theta_A = \frac{1}{24}\,\frac{ML}{EI}$$

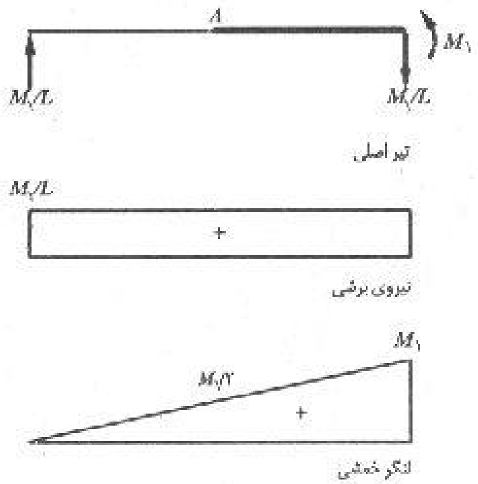
$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 :$$

$$\delta_A = M_{A'} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2EI} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2}\right) - \frac{ML}{6EI} \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow\ \delta_A = \frac{-1}{16}\,\frac{ML^2}{EI}$$ به‌سمت پایین



مسئله ۱۱-۴۳



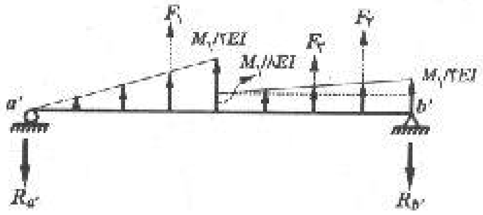
$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{2EI} \cdot \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{M_1L}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{8EI} \cdot \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{32}\,\frac{M_1L}{EI}$$

$$F_3 = \frac{M_1}{8EI} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{16}\,\frac{M_1L}{EI}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} \cdot L = F_1\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) + F_2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) + F_3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

$$R_{a'} = \frac{5}{48}\,\frac{M_1 L}{EI}$$

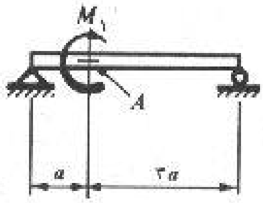


تیر فرضی

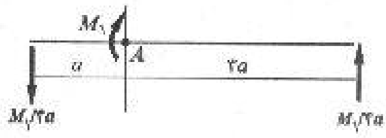
$a'A'$ قطعه : $\uparrow^{+} \sum F_y = 0$

$$\theta_A = V_{A'} = F_1 - R_{a'} = \frac{1}{48}\,\frac{M_1 L}{EI}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = F_1\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) - R_{a'}\cdot\frac{L}{2} = \frac{-1}{32}\,\frac{M_1 L^2}{EI}$$



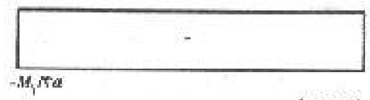
مسئله ۱۱-۴۴



تیر اصلی

$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{4EI}\cdot a\right) = \frac{1}{8}\,\frac{M_1 a}{EI}$$

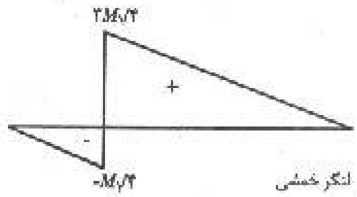
$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3M_1}{4EI}\cdot 3a\right) = \frac{9}{8}\,\frac{M_1 a}{EI}$$



نیروی برشی

$$\circlearrowleft + \sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'}\cdot 4a = F_2\cdot 2a - F_1\left(3a + \frac{a}{3}\right)$$

$$R_{a'} = \frac{11}{24}\,\frac{M_1 a}{EI}$$



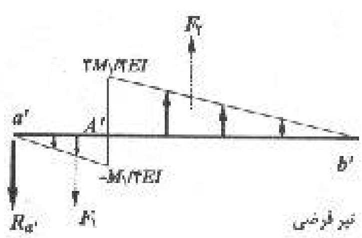
لنگر خمشی

$a'A'$ قطعه : $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = -\,(R_{a'} + F_1)$

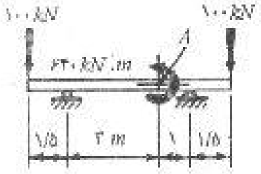
$$= \frac{-7}{12}\,\frac{M_1 a}{EI}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = -\left(R_{a'}\cdot a + F_1\cdot\frac{a}{3}\right)$$

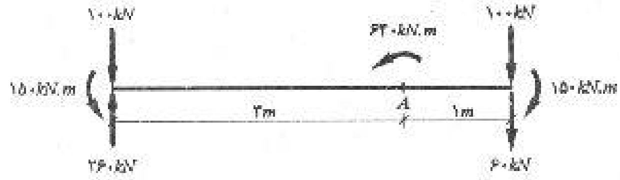
$$= \frac{-1}{2}\,\frac{M_1 a^2}{EI}$$ به سمت پایین



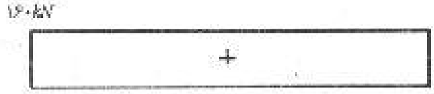
تیر فرضی



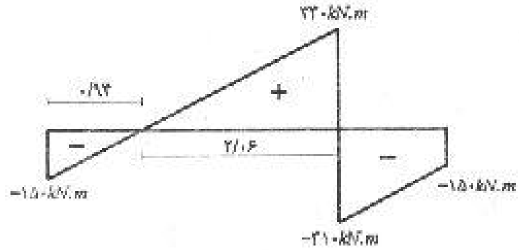
مسأله ۱۱-۴۵



تیر اصلی



نیروی برشی



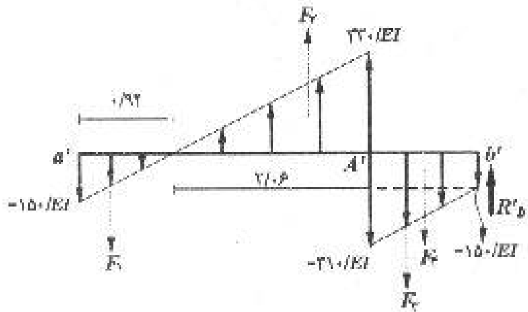
لنگر خمشی

$$F_1 = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۵۰}{EI}\right)(۰/۹۴) = \frac{۷۰/۵}{EI}$$

$$F_2 = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳۳۰}{EI}\right)(۲/۰۶) = \frac{۳۴۰}{EI}$$

$$F_3 = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۶۰}{EI}\right)(۱) = \frac{۸۰}{EI}$$

$$F_4 = \left(\frac{۱۵۰}{EI}\right)(۱) = \frac{۱۵۰}{EI}$$



تیر فرضی

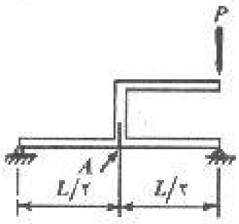
$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow ۴R_{b'} = F_1\left(\frac{۰/۹۴}{۳}\right) + F_3\left(۳ + \frac{۱}{۳}\right) + F_4\left(۳ + \frac{۱}{۲}\right) - F_2\left(۳ - \frac{۲/۰۶}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{۶/۸}{EI} \uparrow$$

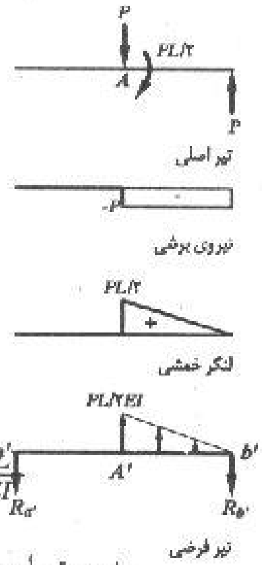
قطعهٔ $A'b'$: $\uparrow + \sum F_y = ۰ \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = F_3 + F_4 - R_{b'} = \frac{۲۲۳/۲}{EI}$

$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = ۰ \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = R_{b'} \cdot ۱ - F_3\left(\frac{۱}{۳}\right) - F_4\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$= -\frac{۹۴/۹}{EI}$$ به سمت پایین



مسأله ۱۱-۴۶

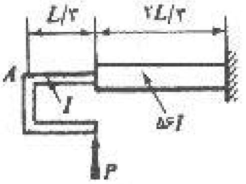


$$+\circlearrowleft \quad \sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} \cdot L = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2}\right)$$

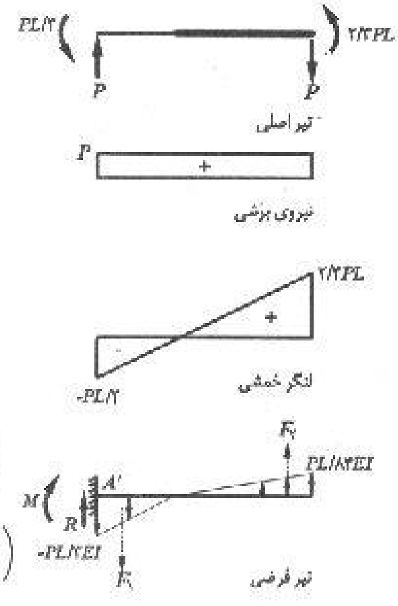
$$R_{a'} = \frac{1}{24}\frac{PL^2}{EI}$$

قطعهٔ $a'A'$: $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = -R_{a'} = -\frac{1}{24}\frac{PL^2}{EI}$

$+\circlearrowleft \quad \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = -R_{a'}\frac{L}{2} = -\frac{1}{48}\frac{PL^3}{EI}$ به‌سمت پایین



مسأله ۱۱-۴۷



تیر فرضی:

$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{3EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{PL^2}{18EI}$$

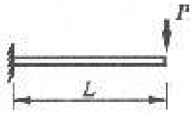
$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{84EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^2}{252EI}$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = R_{A'} = F_1 - F_2 = \frac{13PL^2}{252EI}$$

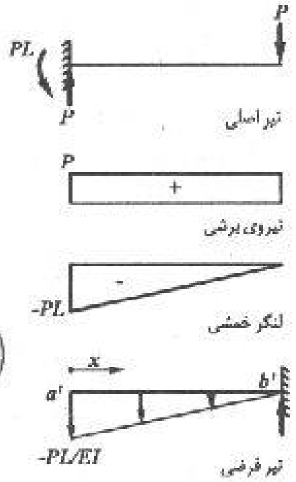
$$+\circlearrowleft \quad \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = F_2\left(L - \frac{1}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)\right)$$

$$-F_1\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3}\right) = -\frac{1}{324}\frac{PL^3}{EI}$$

۱۱–۴۸ تا ۱۱–۵۰. با استفاده از روش تیر فرضی، رابطهٔ منحنی ارتجاعی تیرهای مسائل ۱۱–۸ و ۱۱–۱۵ و ۱۱–۳۸ را به دست آورید.



مسأله ۱۱-۴۸



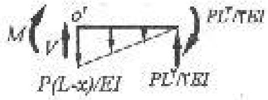
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{b'} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right)\cdot L = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{b'} = 0 \Rightarrow M_{b'} = \frac{PL^2}{2EI}\cdot\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$$

قطعهٔ $o'b'$: $+\circlearrowleft \ \sum M_{o'} = 0 \Rightarrow v_x = M_x$

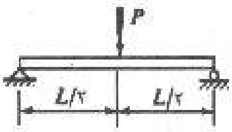
$$= \frac{PL^2}{2EI}(L-x) - \frac{PL^3}{3EI} - \frac{1}{2}\frac{P(L-x)^2}{EI}\left(\frac{L-x}{3}\right)$$

$$\therefore v_x = \frac{PL^2}{2EI}(L-x) - \frac{PL^3}{3EI} - \frac{P(L-x)^3}{6EI}$$

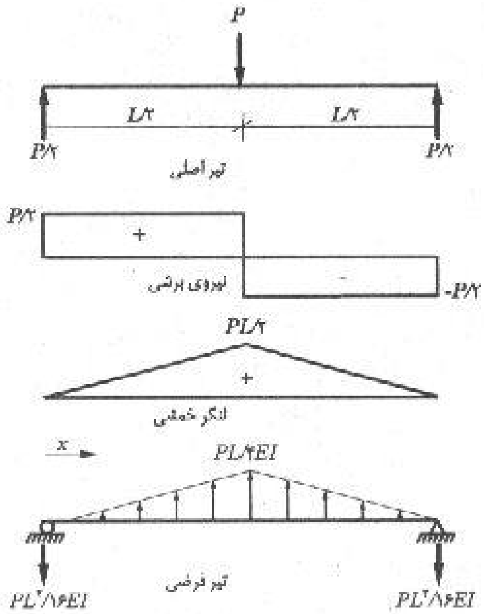


$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^2x}{2} - \frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{L^2x}{2} - \frac{Lx^2}{2}\right)$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$$



مسأله ۱۱-۴۹

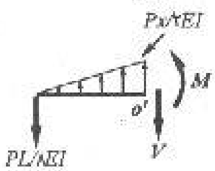


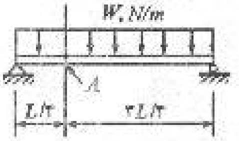
$$0 < x < \frac{L}{2}$$

$$+\circlearrowleft \ \sum M_{o'} = 0 \Rightarrow v_x = M_x = \frac{1}{2}\frac{Px^2}{2EI}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{PL^2x}{16EI} = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{PL^2x}{16EI}$$

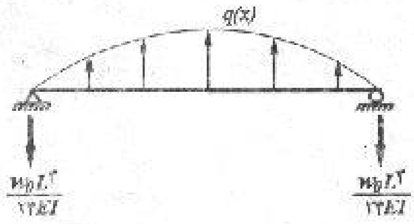
$$\frac{L}{2} < x < L$$

$$x \to (L-x) \Rightarrow v_x = \frac{P(L-x)^3}{12EI} - \frac{PL^2(L-x)}{16EI}$$





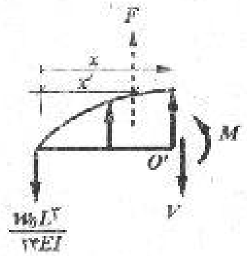
مسأله ۱۱-۵۰



با مراجعه به مسأله (۱۱-۳۸) داریم:

$$q_x = \frac{w_\circ}{2EI}(Lx - x^2)$$

$$F = \int_\circ^x q_x\,dx \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int_\circ^x x\,dA}{F} = \frac{\int_\circ^x x\,q_x\,dx}{F}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = \Rightarrow v_x = M_x = F.(x - \bar{x}) - \frac{w_\circ L^3}{24EI}.x$$

حال مقادیر F و $\bar{x}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \int_\circ^x q_x\,dx = \int_\circ^x \frac{w_\circ}{2EI}(Lx - x^2) = \frac{w_\circ}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_\circ^x x\,q_x\,dx}{F} = \frac{\int_\circ^x \frac{w_\circ}{2EI}(Lx^2 - x^3)}{\frac{w_\circ}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)} = \frac{\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$$

$$\therefore v_x = F.(x.\bar{x}) - \frac{w_\circ L^3}{24EI}.x = \frac{w_\circ}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\left(x - \frac{\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}}\right) - \frac{w_\circ L^3}{24EI}.x$$

$$= \frac{w_\circ}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{w_\circ L^3}{24EI}x = \frac{w_\circ}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) - \frac{w_\circ L^3 x}{24EI}$$

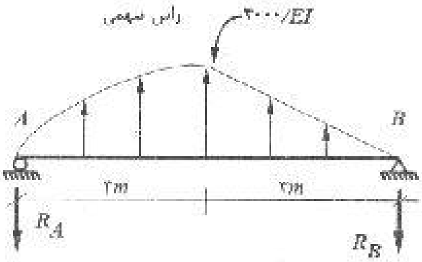
۱۱-۵۱ تا ۱۱-۵۳. با استفاده از روش تیر فرضی، حداکثر تغییر مکان تیرهای ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۷ و ۱۱-۴۰ را بدست آورید.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{4000}{EI}\right)(4) + \left(\frac{2}{3}\times 3\times\frac{4000}{EI}\right)\left(\frac{5}{8}\times 3\right) - R_B(6) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{6500}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_\circ = 0 \Rightarrow M_x + \frac{1}{2}x\left(\frac{4000}{EI}.\frac{x}{3}\right) - \frac{6500}{EI}x = 0$$

$$M_x = \frac{-1}{3EI}(19500x - 2000x^2)$$

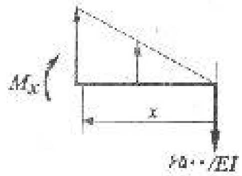


$$dM/dx = ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{۳EI}(۱۹۵۰۰ - ۴۰۰۰x) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۴/۸۷۵\ m \qquad \text{از تکیه‌گاه } B$$

$$\delta_{max} = M_{x=۴/۸۷۵} = \frac{-۱}{۳EI}(۱۹۵۰۰(۴/۸۷۵) - ۲۰۰۰(۴/۸۷۵)^۲) = \frac{-۱۵۸۴۳/۷۵}{EI}$$

بطرف پایین



مسأله (۱۱-۵۲)

با مراجعه به حل مسأله (۱۱-۳۷) و با توجه به اینکه بعلت تقارن، تغییر مکان حداکثر در وسط دهانه اتفاق می‌افتد خواهیم داشت:

$$\delta_{max} = M_{x=۳a/۲} = \underbrace{\frac{۱}{۲}\frac{Pa}{EI}\cdot a\left(\frac{a}{۳}+\frac{a}{۲}\right)}_{\text{لنگر بار مثلثی(الاستیک)}} + \underbrace{\frac{Pa}{EI}\cdot\frac{a}{۲}\cdot\frac{a}{۴}}_{\text{لنگر بار یکنواخت الاستیک}} - \underbrace{\frac{Pa^۲}{EI}\cdot\frac{۳a}{۲}}_{\text{لنگر عکس‌العملی تکیه‌گاه}}$$

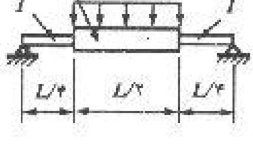
$$\therefore \delta_{max} = \frac{-۲۳}{۲۴}\frac{Pa^۳}{EI} \qquad \text{بطرف پایین (در وسط دهانه)}$$

مسأله (۱۱-۵۳)

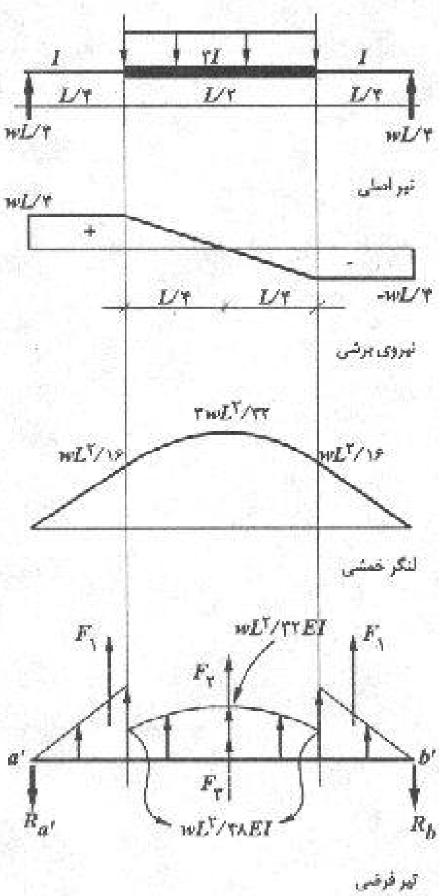
با مراجعه به حل مسأله (۱۱-۴۰) و با توجه به اینکه بعلت تقارن، تغییر مکان حداکثر در وسط دهانه اتفاق می‌افتد لذا تغییر مکان نقطهٔ A در شکل مزبور حداکثر است.

$$\delta_A = \frac{-۵۷}{۲۴}\frac{w.a^۴}{EI}$$

۱۱-۵۴ تا ۱۱-۵۹. با استفاده از روش تیر فرضی، محل و مقدار تغییر مکان حداکثر را برای تیرهای نشان داده شده در شکل محاسبه کنید. از تغییر شکلهای محوری (در مواردی که وجود دارند) صرف نظر نمایید. سایر مشخصات مثل مسائل ۱۱-۳۳ تا ۱۱-۴۷ می‌باشند.



مسأله (۱۱-۵۴)



$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{wL^2}{16EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{1}{128}\,\frac{wL^3}{EI}$$

$$F_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{32EI} - \frac{wL^2}{48EI}\right) = \frac{1}{288}\,\frac{wL^3}{EI}$$

$$F_3 = \left(\frac{wL^2}{48EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{96}\,\frac{wL^3}{EI}$$

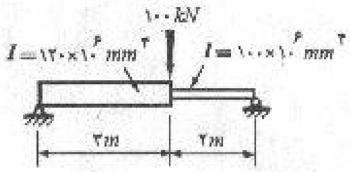
$$R_{a'} = R_{b'} = \frac{2F_1 + F_2 + F_3}{2} = \frac{17}{1152} \times \frac{wL^3}{EI}$$

با توجه به تقارن سیستم، بدیهی است محل تغییر مکان ماکزیمم در وسط دهانه است بنابراین:

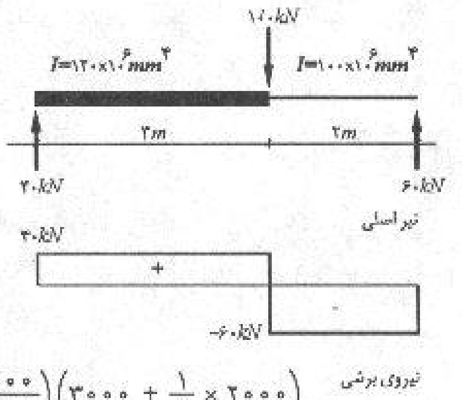
$$+\circlearrowleft \sum M_c = 0 \Rightarrow \delta_{max} = M_c = F_1\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{L}{4}\right)$$

$$+\frac{F_2}{2}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{L}{4}\right) + \frac{F_3}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{4}\right) - R_{a'}\cdot\frac{L}{2}$$

$$\delta_{max} = \frac{-73}{18432}\,\frac{wL^4}{EI}$$



مسأله (۱۱-۵۵)



$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}\right)(3000) = \frac{1500}{E}$$

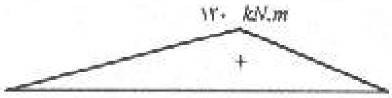
$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{E}\right)(2000) = \frac{1200}{E}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = 0:$$

$$5000\,R_{b'} = \left(\frac{1500}{E}\right)\left(\frac{2}{3} \times 3000\right) + \left(\frac{1200}{E}\right)\left(3000 + \frac{1}{3} \times 2000\right)$$

$$R_{b'} = \frac{1480}{E} \Rightarrow R_{a'} = \frac{1220}{E}$$

قطعهٔ $a'o'$: $V_x = \frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۳۰۰۰E}\right) . x - \frac{۱۲۲۰}{E}$

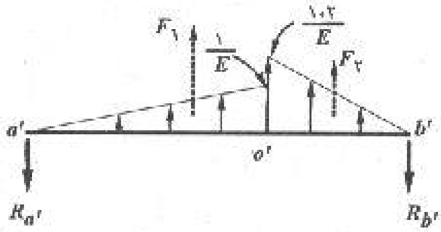


لنگر خمشی

$$\theta = ۰ \Rightarrow V_x = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۳۰۰۰E} . x - \frac{۱۲۲۰}{E}\right) = ۰$$

$$x^۲ = ۷۳۲۰۰۰ \Rightarrow x = ۲۷۰۵/۵ \ mm$$

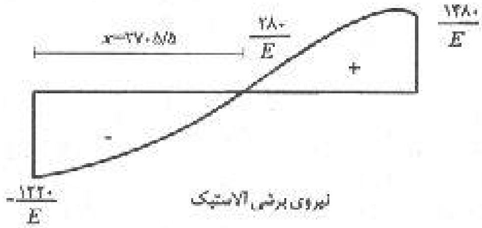


تیر فرضی

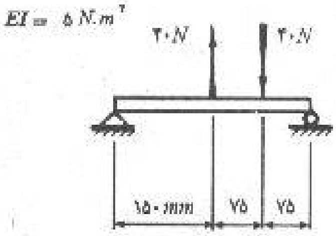
$$\delta_{max} = M_x = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۲۷۰۵/۵)^۲}{۳۰۰۰E}\right) . \left(\frac{۱}{۳} \times ۲۷۰۵/۵\right)$$

$$- \frac{۱۲۲۰}{E} \times ۲۷۰۵/۵$$

$$\Rightarrow \delta_{max} = -۱۱ \ mm$$



نیروی برشی الاستیک



مسأله (۱۱-۵۶)

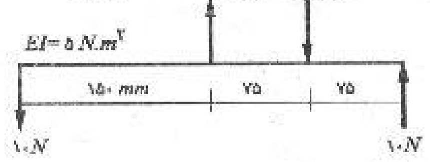
$$F_۱ = \frac{۱}{۲}(۰/۳ \times ۰/۱۵) = ۰/۰۲۲۵ \quad \text{و} \quad F_۲ = \frac{۱}{۲}(۰/۳ \times ۰/۰۵) = ۰/۰۰۷۵$$

$$F_۳ = \frac{۱}{۲}(۰/۱۵ \times ۰/۰۲۵) = ۰/۰۰۱۸۷۵ \quad \text{و} \quad F_۴ = \frac{۱}{۲}(۰/۱۵ \times ۰/۰۷۵) = ۰/۰۰۵۶۲۵$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow ۰/۳ R_{b'} = F_۱\left(\frac{۲}{۳} \times ۰/۱۵\right) + F_۲\left(۰/۱۵ + \frac{۱}{۳} \times ۰/۰۵\right)$$

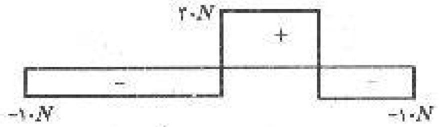
$$- F_۳\left(۰/۲ + \frac{۲}{۳} \times ۰/۰۲۵\right) - F_۴\left(۰/۲۲۵ + \frac{۱}{۳} \times ۰/۰۷۵\right)$$

$$\Rightarrow R_{b'} = ۰/۰۰۵۶ \Rightarrow R_{a'} = ۰/۰۱۶۹$$



تیر اصلی

با توجه به نمودار تقریبی برش الاستیک، بدیهی است که محل تغییر مکان ماکزیمم در ناحیهٔ $۰ \le x \le ۱۵۰mm$ قرار دارد.

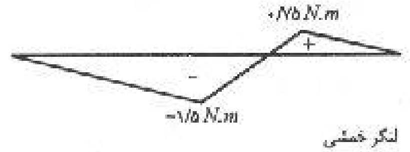


نیروی برشی

$۰ \le x \le ۱۵۰\ mm$:

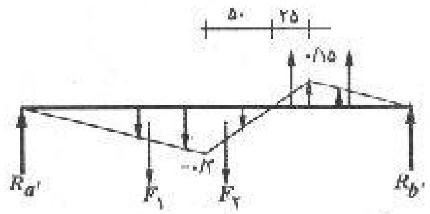
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_x = R_{a'} - \frac{۱}{۲}(۲x\,.\,x)$$

$$= ۰/۰۱۶۹ - x^۲$$



لنگر خمشی

$$\theta = ۰ \Rightarrow V_x = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰/۰۱۶۹ \Rightarrow x = ۰/۱۳m$$

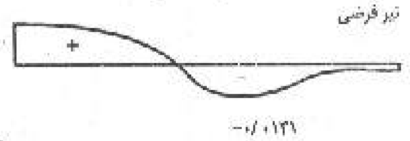


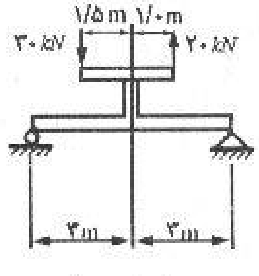
تیر فرضی

$$+\circlearrowleft \sum M_x = ۰ \xRightarrow{x=۰/۱۳} \delta_{max} = M_{max}$$

$$= R_{a'}(۰/۱۳) - \frac{۱}{۲}(۲ \times ۰/۱۳^۲)\left(\frac{۱}{۳} \times ۰/۱۳\right)$$

$\delta_{max} = ۰/۰۰۱۵\ m = ۱/۵\ mm$ بسمت بالا



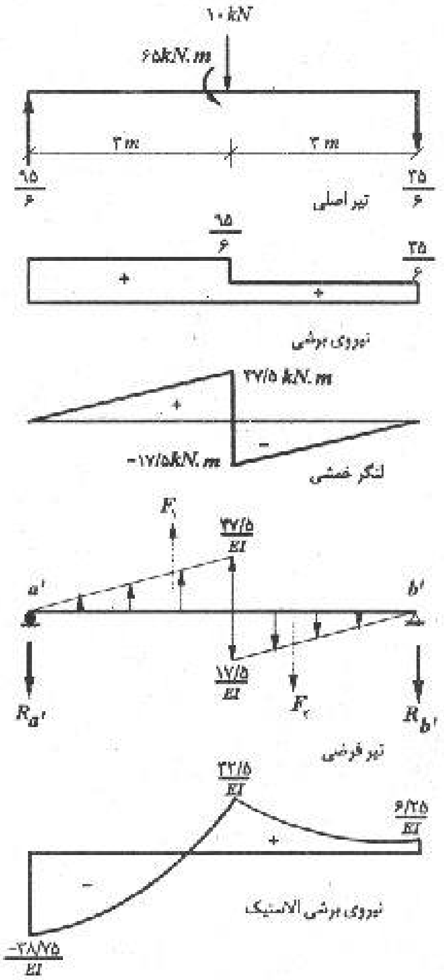


مسأله(۱۱-۵۷)

$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴۷/۵}{EI}\right)(۳) = \frac{۷۱/۲۵}{EI} \quad \text{و} \quad F_۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۷/۵}{EI}\right)(۳) = \frac{۲۶/۲۵}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow ۶R_{b'} = -F_۲(۳+۱) + F_۱(۲) = \frac{۳۷/۵}{EI}$$

$$R_{b'} = \frac{۶/۲۵}{EI}\downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{۳۸/۷۵}{EI}\downarrow$$



با توجه به نمودار برش الاستیک، محل تغییر مکان ماکزیمم در ناحیه $0 \le x \le 3$ قرار دارد:

$$0 \le x \le 3 : \uparrow^{+} \sum Fy = 0$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{1}{2}\left(\frac{47/5\,x}{3EI}\right)x - R_{a'}$$

$$\therefore V_x = \frac{47/5\,x^2}{6EI} - \frac{38/75}{EI}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow \frac{47/5}{6}x^2 = 38/75$$

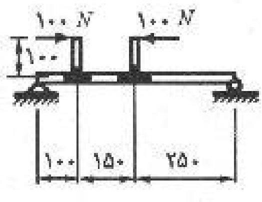
$$\Rightarrow x = 2/21\,m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 \xRightarrow{x=2/21} \delta_{max} = M_{max}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{47/5(2/21)}{3EI}\right)\left(\frac{1}{3}\times 2/21\right) - R_{a'}.(2/21)$$

$\delta_{max} = -\frac{72/75}{EI}$ بسمت پایین

(EI برحسب $kN.m^2$)

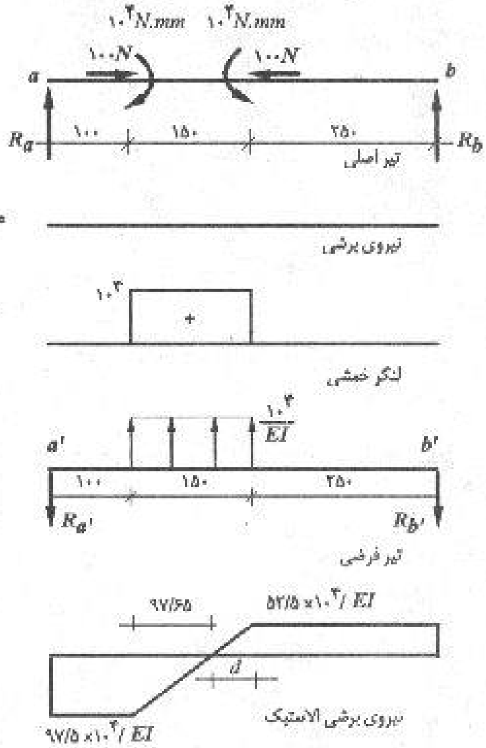


مسئله(۱۱-۵۸)

از معادلات تعادل: $R_a = R_b = 0$

تیر فرضی: $+\circlearrowleft \sum M_{a'} = 0 \Rightarrow 500\,R_{b'} = \left(\frac{10^4}{EI}\right)(150)(100 + 75)$

$$R_{b'} = \frac{52/5 \times 10^4}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{97/5 \times 10^4}{EI}$$



$$\frac{۵۲/۵}{۹۷/۵} = \frac{d}{۱۵۰ - d} \Rightarrow d = ۵۲/۳۵mm$$

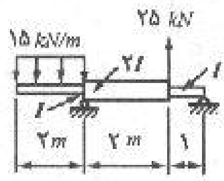
محل تغییر مکان ماکزیمم:

$$x = ۱۰۰ + (۱۵۰ - ۵۲/۳۵) = ۱۹۷/۶۵mm$$

$$\delta_{max} = -\left[\left(\frac{۹۷/۵\times ۱۰^۴}{EI}\times ۱۰۰\right) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۹۷/۵\times ۱۰^۴}{EI}\times ۹۷/۶۵\right)\right]$$

$$= \frac{-۱/۴۵\times ۱۰^۸}{EI}$$ به سمت پایین

(EI بر حسب $N.mm^۲$)



مسأله (۱۱-۵۹)

$$F_۱ = \frac{۱}{۳}(۲)\left(\frac{۳۰}{EI}\right) = \frac{۲۰}{EI} \text{ و } F_۲ = \frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{۱۵ - ۱۳/۳}{EI}\right) = \frac{۱/۷}{EI}$$

$$F_۳ = ۲\left(\frac{۱۳/۳}{EI}\right) = \frac{۲۶/۶}{EI} \text{ و } F_۴ = \frac{۱}{۲}(۱)\left(\frac{۲۶/۷}{EI}\right) = \frac{۱۳/۳۵}{EI}$$

$c'b'$ قطعة: $+\circlearrowleft \sum M_{c'} = ۰ \Rightarrow ۳R_{b'} = F_۴\left(۲ + \frac{۱}{۳}\right) + F_۳\left(\frac{۲}{۲}\right) + F_۲\left(\frac{۱}{۳}\times ۲\right)$

$$R_{b'} = \frac{۱۹/۶}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{۴۷/۰۵}{EI}$$

$a'b'$: $+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow -M_{a'} = F_۱\left(\frac{۳}{۴}\times ۲\right) + F_۲\left(۲ + \frac{۲}{۳}\right) + F_۳(۳) + F_۴\left(۴ + \frac{۱}{۳}\right) - ۵R_{a'}$

$$\Rightarrow M_{a'} = \frac{۳۸/۰۶}{EI}$$

با توجه به نمودار برش الاستیک تغییر مکان حداکثر در فاصلهٔ $۲ \le x \le ۴$ اتفاق می‌افتد.

$$\circ(\sum M_{\circ} = \circ \Rightarrow M_x = M_{a'} + R_{a'}x$$
$$- F_۱\left(x - \frac{۳}{۴}(۲)\right) - \frac{۱۳/۳}{EI} \times \frac{(x-۲)^۲}{۲}$$
$$- \frac{۱۵}{EI} \times \frac{(x-۲)^۲}{۲}$$

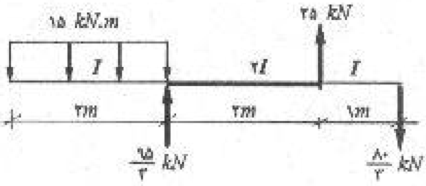
توضیح: بار ذوزنقه‌ای(آخرین مؤلفه عبارت سمت راست فوق) بصورت یکنواخت فرض شده است.

$$dM/dx = \circ \Rightarrow R_a - F_۱ - \frac{۱۳/۳}{EI}(x-۲)$$
$$- \frac{۱۵}{EI}(x-۲) = \circ$$

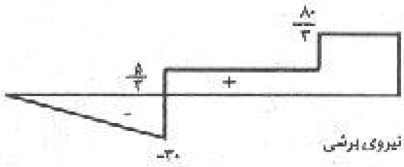
$$۴۲/\circ ۵ - ۲\circ = (۱۳/۳ + ۱۵)(x-۲)$$
$$\Rightarrow x = ۲/۸ m$$

$$\delta_{max} = M_{x=۲/۸} = \left[۳۸/\circ ۶ + ۴۲/\circ ۵(۲/۸) \right.$$
$$- ۲\circ(۲/۸ - ۱/۵) - ۱۳/۳ \times \frac{(۲/۸-۲)^۲}{۲}$$
$$\left. - ۱۵ \times \frac{(۲/۸-۲)^۲}{۲} \right] \times \frac{۱}{EI} = \frac{۱۲\circ/۷۴۴}{EI}$$

به سمت بالا

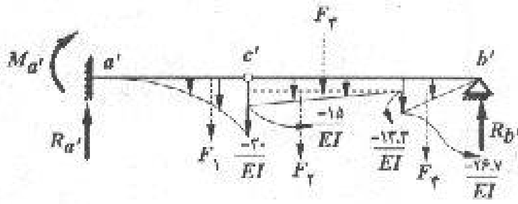


تیر اصلی

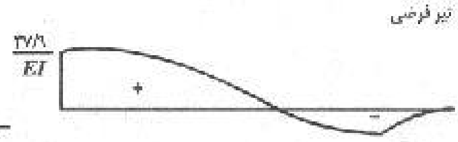


نیروی برشی

لنگر خمشی

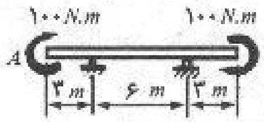


تیر فرضی

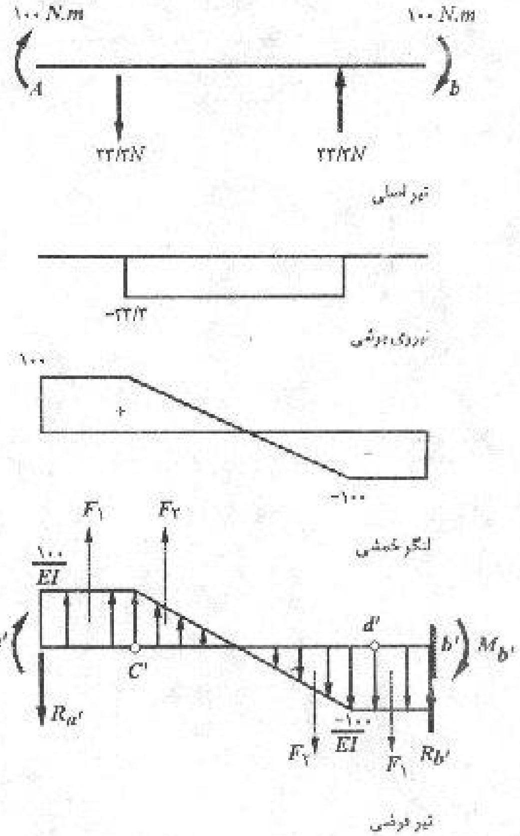


نیروی برشی الاستیک

۱۱-۶۰ تا ۱۱-۶۵. با استفاده از روش تیرفرضی، مطلوب است محاسبهٔ تغییر مکان و شیب نقطهٔ A از تیرهای بالکن دار نشان داده شده در شکل. سایر شرایط مثل مسائل ۱۱-۵۴ تا ۱۱-۵۹ می‌باشد.



مسأله (۱۱-۷۰)



$$F_1 = \left(\frac{100}{EI}\right)(3) = \frac{300}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{EI}\right)(3) = \frac{150}{EI}$$

$c'd'$ قطعه: $+\circlearrowleft \sum M_{c'} = 0$

$$\Rightarrow R_{d'}\,(6) = \frac{150}{EI}\,(5) - \frac{150}{EI}\,(1)$$

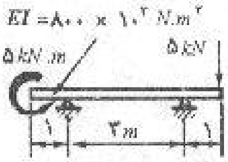
$$R_{d'} = \frac{100}{EI} \uparrow \Rightarrow R_{c'} = \frac{100}{EI} \downarrow$$

$a'c'$ قطعه: $\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{400}{EI} \downarrow$

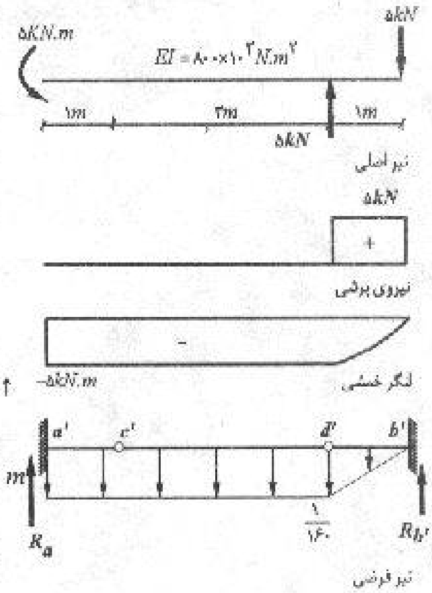
$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{400}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{c'} = 0 \Rightarrow M_{a'} = \frac{400}{EI}\,(3) - \frac{300}{EI}\,(1/5) = \frac{750}{EI}$$

$\Rightarrow \delta_A = \frac{750}{EI}$ به سمت بالا



مسأله (۱۱-۷۱)



$c'd'$ قطعه: $R_{c'} = R_{d'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{160} \times 3\right) = 0/0094 \uparrow$

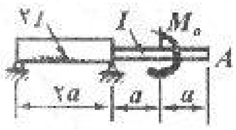
$a'c'$ قطعه: $R_{a'} = \left(\frac{1}{160} \times 1\right) + 0/0094 = 0/016 \uparrow$

$$M_{a'} = \left(\frac{1}{160} \times 1 \times \frac{1}{2}\right) - 0/016 \times 1 = -0/013m$$

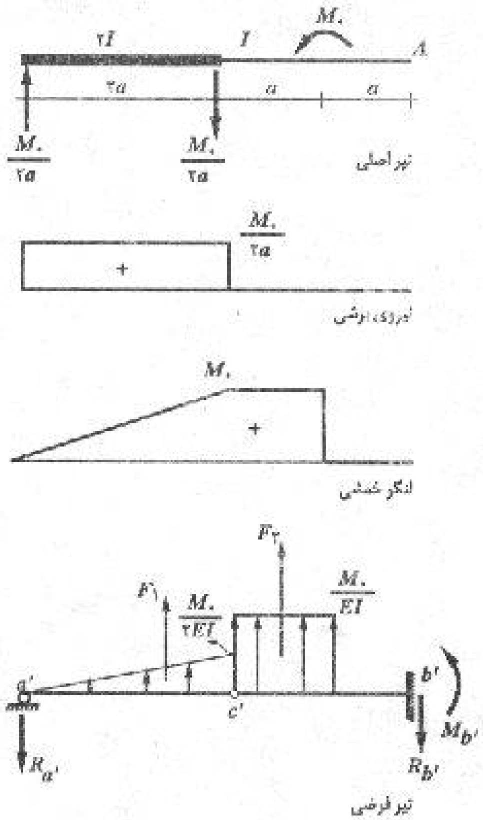
$d'b'$ قطعه: $R_{b'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{160} \times 1\right) + 0/0094 = 0/012 \uparrow$

$$M_{b'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{160} \times 1 \times \frac{1}{3}\right) - 0/012 \times 1 = -0/011m$$

$\therefore \delta_{max} = \delta_{a'} = -0/013m = 13mm$ بسمت پایین



مسأله (۱۱-۷۲)



$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{M_۰}{۲EI}\cdot ۲a\right) = \frac{M_۰ a}{۲EI}\ ,\ F_۲ = \frac{M_۰ a}{EI}$$

$a'c'$ قطعه : $+\circlearrowleft \sum M_{c'} = ۰$:

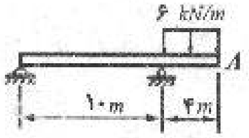
$$۲a\ .\ R_{a'} = F_۱\left(\frac{۱}{۳}\ .\ ۲a\right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{M_۰ a}{۶EI}$$

$$\therefore R_{b'} = F_۱ + F_۲ - R_{a'} = \frac{۴}{۳}\frac{M_۰ a}{EI}$$

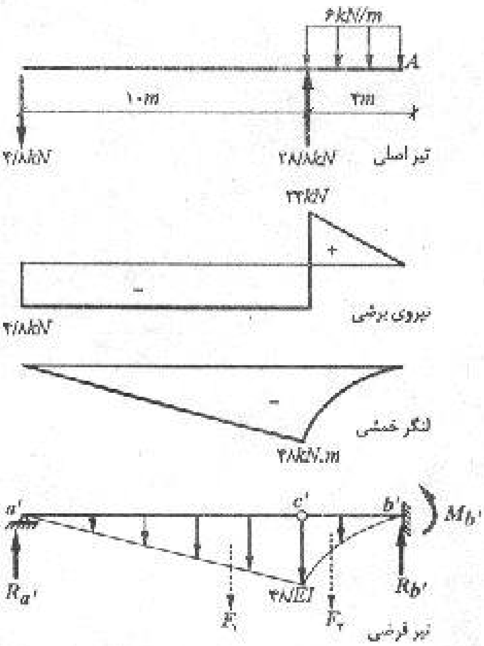
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{۴}{۳}\times\frac{M_۰ a}{EI}$$

$$M_{b'} = F_۱\left(۲a + \frac{۲a}{۳}\right) + F_۲\left(a + \frac{a}{۲}\right) - R_{a'}(۴a)$$

$$= \frac{۱۳}{۶}\frac{M_۰ a^۲}{EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{۱۳}{۶}\frac{M_۰ a^۲}{EI}$$ به سمت بالا



مسأله (۱۱-۷۳)



$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴۸}{EI}\right)(۱۰) = \frac{۲۴۰}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۴۸}{EI}\right)(۴) = \frac{۶۴}{EI}$$

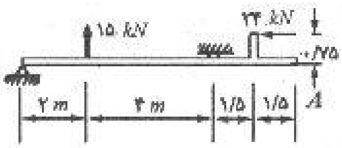
$a'c'$ قطعه : $\overset{+}{\curvearrowleft} M_{c'} = ۰ \Rightarrow ۱۰\ R_{a'} = F_۱\left(\frac{۱۰}{۳}\right)$

$$\Rightarrow R_{a'} = \frac{۸۰}{EI}$$

$$\therefore R_{b'} = F_۱ + F_۲ - R_{a'} = \frac{۲۲۴}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{۲۲۴}{EI}$$

$$M_{b'} = ۱۴R_a - F_۱\left(۴ + \frac{۱۰}{۳}\right) - F_۲\left(\frac{۳}{۴} \times ۴\right) = \frac{-۸۳۲}{EI} \Rightarrow \delta_A = -\frac{۸۳۲}{EI}$$ به سمت پایین



مسأله (۱۱-۶۴)

$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۴}{EI}\right)(۲) = \frac{۱۴}{EI}$$

$$F_۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۴}{EI}\right)(۱/۷۵) = \frac{۱۲/۲۵}{EI}$$

$$F_۳ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۸}{EI}\right)(۲/۲۵) = \frac{۲۰/۲۵}{EI}$$

$$F_۴ = \left(\frac{۱۸}{EI}\right)(۱/۵) = \frac{۲۷}{EI}$$

$a'c'$ قطعه: $\overset{+}{\sum} M_{c'} = ۰$:

$$۶R_{a'} = -F_۲\left(\frac{۲/۲۵}{۳}\right) + F_۱\left(۴ + \frac{۲}{۳}\right) + F_۳\left(۲/۲۵ + \frac{۲}{۳} \times ۱/۷۵\right)$$

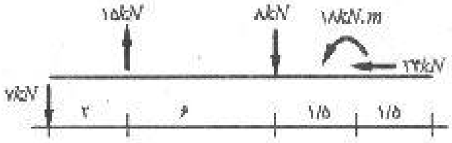
$$\Rightarrow R_{a'} = \frac{+۱۵/۳۳}{EI}$$

$$\therefore R_{b'} = R_{a'} + F_۳ + F_۴ - F_۱ - F_۲ = \frac{۳۶/۳۳}{EI}$$

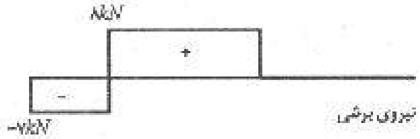
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{۳۶/۳۳}{EI}$$

$$M_{b'} = R_{a'}(۹) + F_۳\left(۳ + \frac{۴}{۳}\right) + F_۴\left(۱/۵ + \frac{۱/۵}{۲}\right) - F_۱\left(۷ + \frac{۲}{۳}\right) - F_۲\left(۵/۲۵ + \frac{۲}{۳} \times ۱/۷۵\right)$$

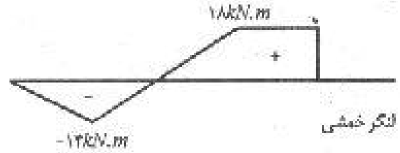
$$= \frac{۱۰۰/۵}{EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{۱۰۰/۵}{EI}$$ به سمت بالا



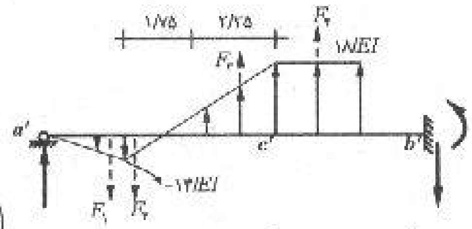
تیر اصلی



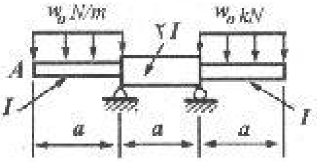
نیروی برشی



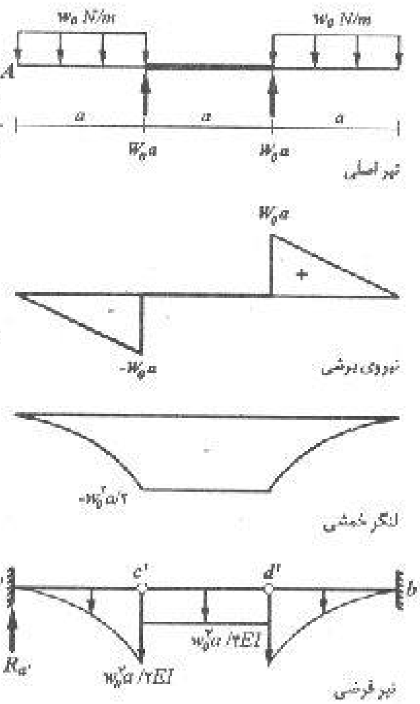
لنگر خمشی



تیر فرضی



مسأله (۱۱-۶۵)



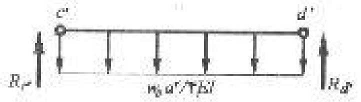
قطعه $c'd'$: $R_{c'} = R_{d'} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{w_۰ a^۲}{۴EI}\right)(a) = \frac{w_۰ a^۳}{۸EI}\uparrow$

قطعه $a'c'$: $+\uparrow\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{a'} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{w_۰ a^۲}{۲EI}\right)(a) + \frac{w_۰ a^۳}{۸EI}$

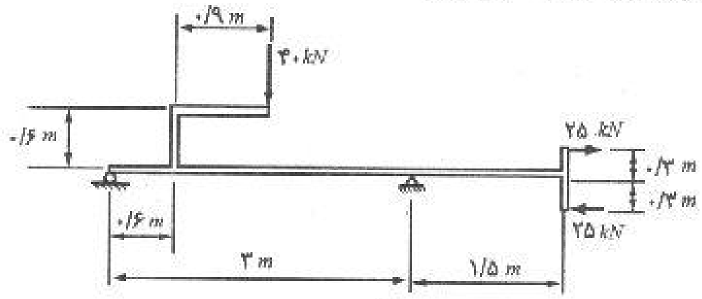
$$\theta_A = R_{a'} = \frac{۷ w_۰ a^۳}{۲۴EI}$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{c'} = ۰ \Rightarrow M_{a'} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{w_۰ a^۲}{۲EI}\cdot a\right)\left(\frac{۱}{۴}a\right) - R_{a'}\cdot a$$

$= \frac{-w_۰ a^۴}{۴EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{-w_۰ a^۴}{۴EI}$ به سمت پایین



۱۱-۶۶. مطلوب است تعیین محل و مقدار حداکثر تغییر مکان به طرف بالای تیر نشان داده شده در شکل. جواب را بر حسب EI بیان کنید.



مسئله (۱۱-۶۶)

$F_۱ = ۰/۵\left(\frac{۹}{EI}\right)(۰/۶) = \frac{۲/۷}{EI}$ ؛ $F_۲ = ۰/۵\left(\frac{۴۵}{EI}\right)(۱/۸) = \frac{۴۰/۵}{EI}$

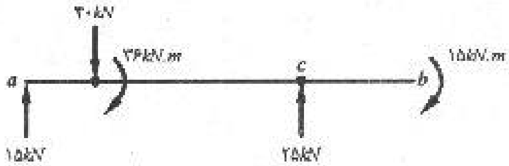
$F_۳ = ۰/۵\left(\frac{۱۵}{EI}\right)(۰/۶) = \frac{۴/۵}{EI}$ ؛ $F_۴ = \left(\frac{۱۵}{EI}\right)(۱/۵) = \frac{۲۲/۵}{EI}$

قطعه $a'c'$: $+\circlearrowleft\sum M_{c'} = ۰$;

$$۳R_{a'} = F_۱\left(۲/۴ + \frac{۰/۶}{۳}\right) + F_۲\left(۰/۶ + \frac{۲}{۳}\times ۱/۸\right) - F_۳\left(\frac{۰/۶}{۳}\right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{۲۴/۴۳}{EI}$$

$$\therefore R_{b'} = R_{a'} + F_3 + F_4 - F_1 - F_2$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{8/23}{EI}$$



تیر اصلی

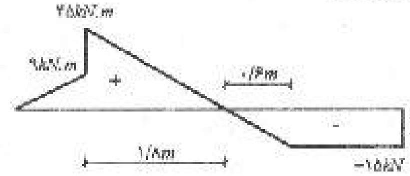
$$M_{b'} = F_1\left(3/9 + \frac{0/6}{3}\right)$$

$$+ F_2\left(2/1 + \frac{2}{3} \times 1/8\right)$$

$$- R_{a'}(4/5) - F_3\left(1/5 + \frac{0/6}{3}\right)$$

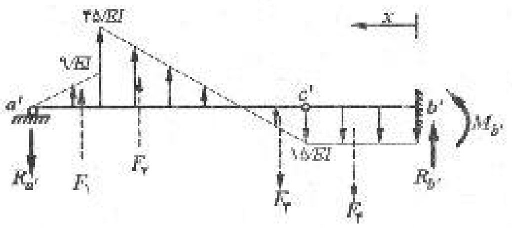
$$- F_4\left(\frac{1/5}{2}\right) = \frac{10/4}{EI}$$

نیروی برشی



لنگر خمشی

با توجه به منحنی نیروی برشی الاستیک، دو نقطهٔ اکسترمم برای تیر مفروض است، ولی با توجه به نحوهٔ بارگذاری تیر اصلی، بدیهی است که تنها ناحیهٔ cb می‌تواند تغییر مکان رو به بالا داشته باشد. بنابراین:

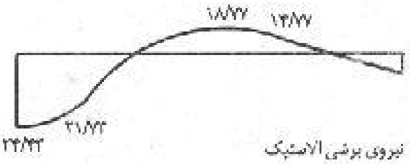


تیر فرضی

قطعه $c'b'$: $\quad V_x = \left(\frac{15}{EI}.x\right) - R_{b'}$

$$\theta = 0 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow \frac{15}{EI}x = \frac{8/23}{EI}$$

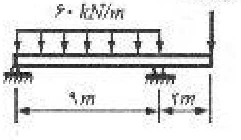
$$\Rightarrow x = 0/55m$$



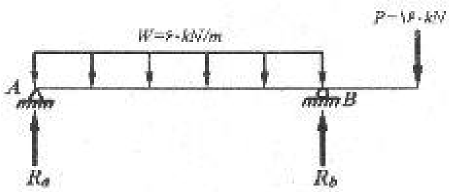
نیروی برشی الاستیک

$$x = 0/55 \Rightarrow M_x = M_{b'} + R_{b'}(0/55) - \left(\frac{15}{EI}\right)\left(\frac{0/55^2}{2}\right) = \frac{12/66}{EI} \quad \Rightarrow \delta_{max} = \frac{12/66}{EI}$$

۱۱-۶۷. **مطلوب است تعیین حداکثر تغییر مکان به طرف بالای تیر یک سر بالکن نشان داده شده در شکل. E و I هر دو ثابت می‌باشند.**



مسئله (۱۱-۶۷)



از معادلات تعادل حاصل می‌شود:

$$R_a = ۲۱۶/۶۷kN \quad و \quad R_b = ۴۸۳/۳۳kN$$

$$۰ \le x \le ۹ : M(x) = R_a x - w\frac{x^۲}{۲}$$

$$EI\frac{d^۲v}{dx^۲} = M(x) = R_a x - w\frac{x^۲}{۲}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = R_a\frac{x^۲}{۲} - w\frac{x^۳}{۶} + C_۱$$

$$EIv = R_a\frac{x^۳}{۶} - w\frac{x^۴}{۲۴} + C_۱ x + C_۲ \ : \ v_{x=۰} = ۰ \Rightarrow C_۲ = ۰$$

$$v_{x=۹} = ۰ \Rightarrow C_۱ = ۳۰/۳۷۵\,w - ۱۳/۵\,R_a$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = R_a\frac{x^۲}{۲} - w\frac{x^۳}{۶} + (۳۰/۳۷۵w - ۱۳/۵R_a)$$

$$x = ۹ \Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = ۲۷R_a - ۹۱/۱۲۵w = EI\theta_B \quad (۱)$$

$$۹ \le x \le ۱۲ \ , \ M(x) = -P(۱۲ - x) = P(x - ۱۲)$$

$$EI\frac{d^۲v}{dx^۲} = M(x) = P(x - ۱۲)$$

$$EI\frac{dv}{dx} = P\left(\frac{x^۲}{۲} - ۱۲x\right) + C'_۲ \quad (i)$$

$$x = ۹ \Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -۶۷/۵\,P + C'_۲ = EI\theta_B \quad (۲)$$

$$(۱) \ و \ (۲) \Rightarrow ۲۷\,R_a - ۴۱/۱۲۵w = -۶۷/۵P + C'_۲ \Rightarrow C'_۲ = ۲۷\,R_a - ۹۱/۱۲۵w + ۶۷/۵P$$

$$\therefore EIv = P\left(\frac{x^۳}{۶} - ۶x^۲\right) + (۲۷\,R_a - ۹۱/۱۲۵w + ۶۷/۵P)\,x + C'_۲ \quad (ii)$$

$$v_{x=۹} = ۰ \Rightarrow C'_۲ = ۸۲۰/۱۲۵w - ۲۴۳\,R_a - ۲۴۳\,P$$

توضیح: در نقطه‌ای که حداکثر تغییر مکان ایجاد می‌شود، شیب منحنی ارتجاعی صفر خواهد بود؛ لذا معادلهٔ (i) را برابر صفر قرار میدهیم تا طول نقطه حداکثر بدست آید:

$$P\left(\frac{x^۲}{۲} - ۱۲x\right) + \left(۲۷R_a - ۹۱/۱۲۵w + ۶۷/۵P\right) = ۰$$

$$\frac{x^۲}{۲} - ۱۲x = -۲۷\frac{R_a}{P} + ۹۱/۱۲۵\frac{w}{P} - ۶۷/۵$$

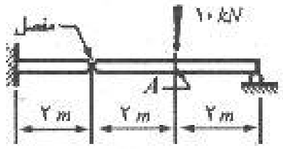
با جایگزینی مقادیر $R_a = ۲۱۶/۶۷\,kN$ و $P = ۱۶۰\,kN$ و $w = ۶۰\,kN/m$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = ۱۴/۰۵m & \text{غیرقابل قبول} \\ x_2 = ۹/۹۵m \end{cases}$$

حال با قرار دادن مقدار $x = ۹/۹۵$ در معادلهٔ (ii) مقدار تغییر مکان حداکثر بدست می‌آید.

$$x = ۹/۹۵ \Rightarrow v = \frac{۱۶۹\times۱۰^{۳}}{EI}m$$ به سمت بالا

۱۱-۶۸ و ۱۱-۶۹. با استفاده از روش تیر فرضی، تغییر مکان نقطهٔ A از تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید. EI در تمام طول تیر ثابت می‌باشد.



شکل (۱۱-۶۸)

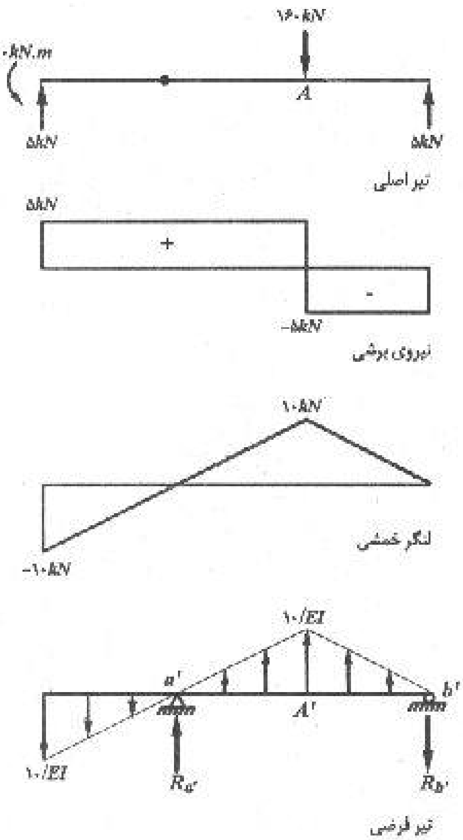
$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ :$$

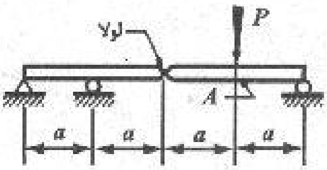
$$۴R_{b'} = ۰/۵\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۴)(۲) + ۰/۵\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۲)\left(\frac{۲}{۳}\times۲\right)$$

$$R_{b'} = \frac{۱۳/۳}{EI}\downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{۳/۳}{EI}\uparrow$$

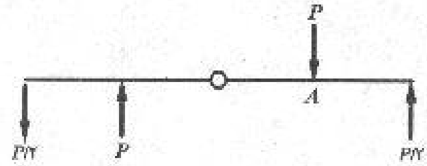
$$\delta_A = M_{A'} = ۰/۵\left(\frac{۱۰}{EI}\right)(۲)\left(\frac{۲}{۳}\right) - R_{b'}(۲)$$

$$\delta_A = \frac{-۱۹/۹۳}{EI}$$ به سمت پایین

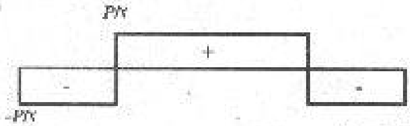




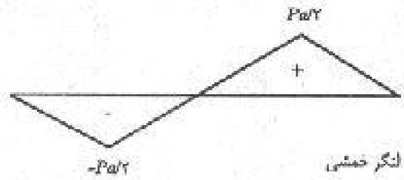
مسأله (۱۱-۶۹)



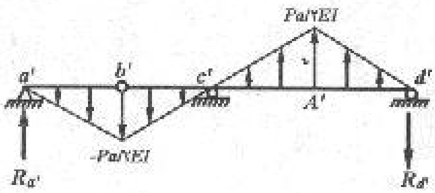
تیر اصلی



نیروی برشی



لنگر خمشی



تیر فرضی

قطعهٔ $a'b'$:

$$+\circlearrowleft \sum M_{b'} = ۰ :$$

$$R_{a'} . a = ۰/۵\left(\frac{Pa}{۲EI} . a\right)\left(\frac{a}{۳}\right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{Pa^{۲}}{۱۲EI}$$

قطعهٔ $a'd'$:

$$+\circlearrowleft \sum M_{c'} = ۰ :$$

$$R_{d'}(۲a) = ۲\left(۰/۵\frac{Pa}{۲EI}(۲a)(a)\right) - R_{a'}(۲a)$$

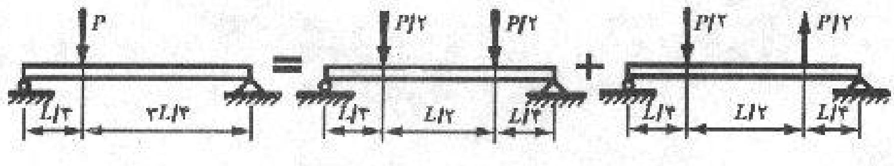
$$R_{d'} = \frac{۵Pa^{۲}}{۱۲EI}$$

قطعهٔ $A'd'$:

$$\delta_A = M_{A'} = \left(۰/۵\frac{Pa}{۲EI} . a\right)\left(\frac{a}{۳}\right) - R_{d'} . a$$

$$\delta_A = -\frac{Pa^{۳}}{۳EI}$$ به سمت پایین

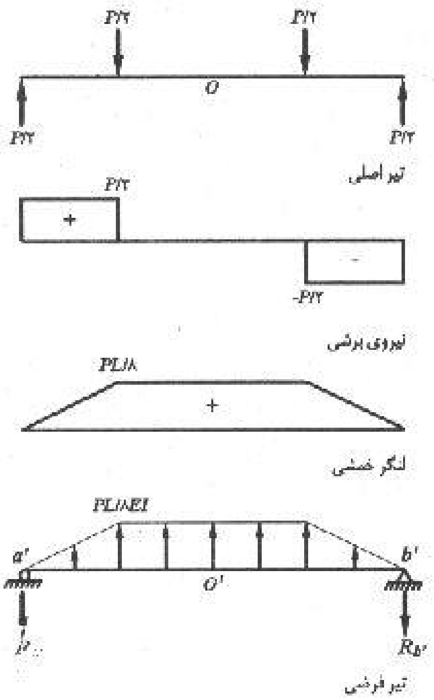
۱۱-۷۰. با استفاده از روش رویهم گذاری، تغییر مکان وسط دهانه تیر سمت چپ را از جمع تغییر مکانهای دو تیر سمت راست به دست آورید. از روش تیر فرضی استفاده نمایید. EI در تمام طول دهانه ثابت می‌باشد.



مسأله ۱۱-۷۰

تیر فرضی $a'b'$:

$$+\circlearrowleft \sum M_{a'} = ۰ \Rightarrow R_{b'} = \frac{۳PL^{۲}}{۶۴EI} \downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{۳PL^{۲}}{۶۴EI} \downarrow$$

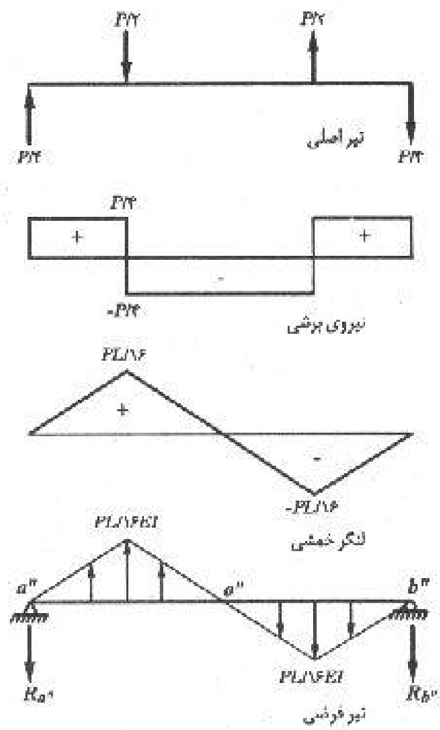


قطعه $a'o'$:

$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = 0 :$$

$$M_{o'} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{PL}{8EI} \times \frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{L}{4}\right) + \left(\frac{PL}{8EI} \times \frac{L}{4} \times \frac{L}{8}\right) - \left(\frac{3PL^2}{64EI} \times \frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{1o} = M_{o'} = -\frac{11}{468}\frac{PL^3}{EI}$$



تیر فرضی $a''b''$:

$$+\circlearrowleft \sum M_{a''} = 0 \Rightarrow R_{b''} = \frac{1}{128}\frac{PL^2}{EI} \uparrow$$

$$\Rightarrow R_{a''} = \frac{1}{128}\frac{PL^2}{EI} \downarrow$$

قطعه $a''o''$: $+\circlearrowleft \sum M_{o''} = 0$

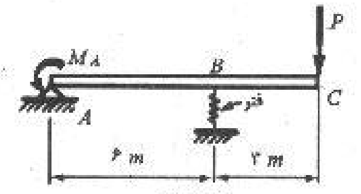
$$M_{o''} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{PL}{16EI} \times \frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) - R_{a''} \times \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \delta_{2o} = M_{o''} = 0$$

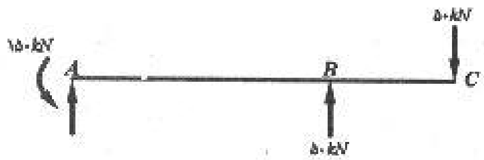
$$\therefore \delta_o = \delta_{1o} + \delta_{2o} = \frac{-11}{768}\frac{PL^3}{EI} + 0$$

$$\boxed{\delta_o = \frac{-11}{768}\frac{PL^3}{EI}}$$

۱۱-۷۱. تکیه‌گاهها و بارگذاری یک تیر فولادی مطابق شکل می‌باشد. نیروی P مساوی ۵۰ کیلونیوتن و لنگر M_A مساوی ۱۵۰ کیلو نیوتن متر می‌باشد. شیب و تغییر مکان قائم نقطه C را نسبت به خط مبنای AC به دست آورید.



مسئله ۱۱-۷۱



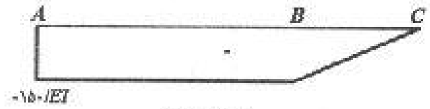
نیروی برشی

سختی فنر را $K = ۳۵۰\ kN/m$ فرض می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow ۶R_b = ۹(۵۰) - ۱۵۰$$

$$\Rightarrow R_b = ۵۰\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_a = ۰\ kN$$



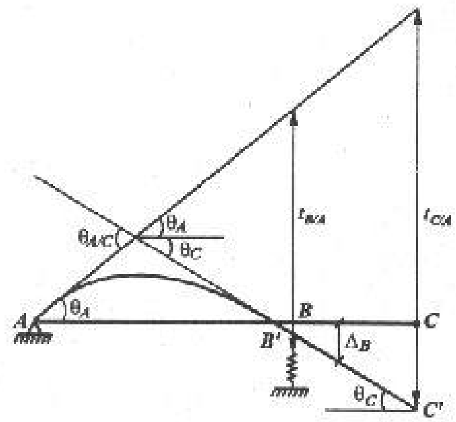
نمودار M/EI

$$t_{B/A} = \left(\frac{-۱۵۰}{EI} \times ۶\right)\left(\frac{۶}{۲}\right) = \frac{-۲۷۰۰}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{R_b}{K} = \frac{۵۰}{K}$$

$$\theta_A = \frac{t_{B/A} - \Delta_B}{۶} = \frac{\frac{۲۷۰۰}{EI} - \frac{۵۰}{K}}{۶}$$

$$= \frac{۲۷۰۰K - ۵۰EI}{۶KEI}$$



منحنی ارتجاعی تیر

$$\theta_{A/c} = \left(\frac{-۱۵۰}{EI} \times ۶\right) + \left(\frac{-۱}{۲} \times \frac{۱۵۰}{EI} \times ۳\right)$$

$$= \frac{-۱۱۲۵}{EI}$$

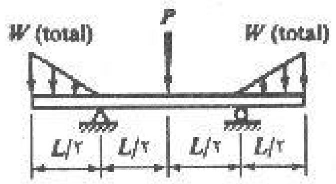
$$\theta_c = \theta_{A/c} - \theta_A = +\frac{۱۱۲۵}{EI} - \frac{۲۷۰۰K - ۵۰EI}{۶\ KEI}$$

$$= \frac{۴۰۵۰K - ۵۰EI}{۶KEI}$$

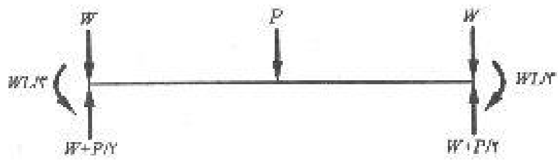
$$t_{C/A} = \left(\frac{-۱۵۰}{EI} \times ۶\right)\left(۳ + \frac{۶}{۲}\right) + \left(\frac{-۱}{۲} \times \frac{۱۵۰}{EI} \times ۳\right)\left(\frac{۲}{۳} \times ۳\right) = -\frac{۵۸۵۰}{EI}$$

$$\delta_c = t_{C/A} - \theta_A(۶ + ۳) = \frac{-۵۸۵۰}{EI} - \frac{۹(۲۷۰۰K - ۵۰EI)}{۶\ KEI} = \frac{-۵۹۴۰۰K + ۴۵۰EI}{۶KEI}$$

۱۱-۷۲. نسبت بارهای W و P چقدر باید باشد تا منحنی ارتجاعی تیر نشان داده شده در شکل در تکیه‌گاهها افقی باشد. EI ثابت می‌باشد.



مسأله(۱۱-۷۲)



$$۰ \le x \le \frac{L}{۲} \Rightarrow V_x = \frac{P}{۲}$$

$$EIv^{(۴)} = ۰$$

$$EIv''' = C_۱ = \frac{P}{۲}$$

$$EIv'' = \frac{P}{۲}x + C_۱ \xRightarrow[M=-WL/۳]{x=۰} c_۱ = -WL/۳$$

$$EIv' = \frac{P}{۲}\frac{x^۲}{۲} - \frac{WL}{۳}x + C_۲ \xRightarrow[\theta=۰]{x=۰} C_۲ = ۰ \Rightarrow EI\theta = \frac{P}{۲}\frac{x^۲}{۲} - \frac{WL}{۳}x$$

به علت تقارن: $x = \frac{L}{۲} \Rightarrow \theta = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۲}\left(\frac{L^۲}{۸}\right) - \frac{WL}{۳}\left(\frac{L}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۸} = \frac{W}{۳} \Rightarrow \boxed{\frac{W}{P} = \frac{۳}{۸}}$

مسائل فصل دوازدهم

۱۲-۱. مطلوبست تعیین واکنشها و رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی محوری برای میلهٔ ارتجاعی نشان داده شده در شکل. سطح مقطع میله ۱۲۰۰ میلی‌متر مربع، a مساوی ۱۵۰ میلی‌متر و b مساوی ۳۰۰ میلی‌متر و P_1 مساوی ۹۰ کیلو نیوتن و P_2 مساوی ۱۵۰ کیلو نیوتن می‌باشد.

مسأله ۱۲-۱

روش جمع آثار:
ابتدا فرض می‌کنیم تکیه گاه سمت راست وجود ندارد. با این فرض تغییر مکان انتهای سمت راست عبارت است از:

$$\delta_1 = 0 + \frac{P_2\, b}{AE} + \frac{(P_2 - P_1)\, a}{AE} = \frac{45000}{E}$$

(الف)

اینک اثر تکیه‌گاه سمت راست را اعمال می‌کنیم که جابجایی مربوط به آن عبارت است از:

$$\delta_2 = \frac{R_B\, L}{AE} = \frac{R_B(2a + b)}{AE} = \frac{R_B}{2E}$$

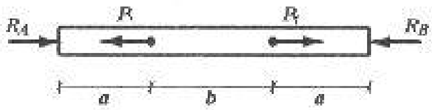
(ب)

اما می‌دانیم که میله هیچگونه تغییر مکانی ندارد بنابراین باید $\delta_1 = \delta_2$

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow R_B = 90\ kN$$

با در نظر گرفتن دیاگرام آزاد کل میله:

$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \rightarrow R_A = 30\ kN$$



(ج)

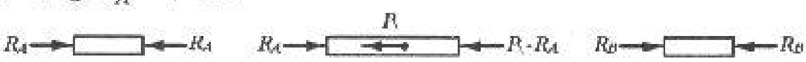
روش دیگر حل مسأله بدین‌صورت می‌باشد:
با در نظر گرفتن شکل (ج):

$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \rightarrow R_A - R_B = P_1 - P_2 \qquad (1)$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \rightarrow -\frac{R_A\, a}{AE} + \frac{(P_1 - R_A)\, b}{EA} - \frac{R_B\, a}{AE} = 0 \rightarrow R_A + R_B = (P_1 - R_A)\frac{b}{a} \qquad (2)$$

با حل معادلات (۱) و (۲) و جاگذاری مقادیر معلوم داریم:

$R_B = 90\ kN$ و $R_A = 30\ kN$



۲-۱۲. مسأله قبل را با فرض اینکه P_2 دو برابر P_1 می‌باشد، در نظر بگیرید. (الف) با فرض رفتار ارتجاعی، مطلوب است تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی، رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی محوری و تغییر شکل محوری. (ب) اگر تنش جاری شدن (σ_{yp}) مساوی ۴۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، نموداری رسم کنید که نشان دهندهٔ تغییرات نیروی P_2 به صورت تابعی از تغییر مکان نقطه اثرش باشد. سطح مقطع میله را ۴۰۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی را 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. برای هر دو حالت در $2a = b$ می‌باشد.

از روش جمع آثار استفاده می‌کنیم:

$$P_2 = 2P_1$$

با فرض اینکه تکیه‌گاه سمت راست وجود ندارد:

$$\delta_1 = \frac{P_2 b}{AE} - \frac{(P_2 - P_1)\,a}{AE} \quad P_2 = 2P_1 \text{ و } b = 2a \Rightarrow \delta_1 = \frac{5P_1 a}{AE}$$

تغییر مکان ناشی از نیروی تکیه‌گاه سمت راست:

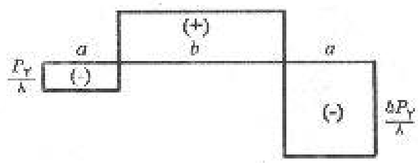
$$\delta_2 = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B\,(2a + b)}{AE} = \frac{4R_B a}{AE}$$

اما می‌دانیم که تغییر مکانی رخ نمی‌دهد پس:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{5P_1}{4} = \frac{5P_2}{8}$$

معادله تعادل کل میله:

$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P_1}{4} = \frac{P_2}{8}$$



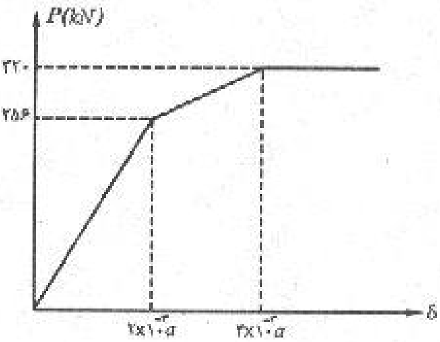
ب) با توجه به نمودار، مشخص است که ابتدا قسمت راست میله به تسلیم می‌رسد.

$$\delta = \frac{R_B a}{AE} = \frac{\sigma a}{E}$$

$$\sigma_{yp} = 400\ N/mm^2 \Rightarrow \delta_1 = \frac{400 \times a}{2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_1 = 2 \times 10^{-3} a$$

$$F = \sigma A \Rightarrow \frac{5P_2}{8} = 400 \times 400 \Rightarrow P_2 = 256\ kN$$

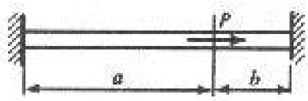
از این به بعد قسمت راست میله به تسلیم رسیده و تنش به اندازه $400\ MPa$ و نیرو به اندازه ($160\ kN = 400 \times 400$) ثابت می‌ماند و قسمت وسط به‌صورت الاستیک تغییر طول می‌دهد.



$$\delta = \frac{Pb}{AE} = \frac{\sigma b}{E} = \frac{۴۰۰ \times (۲a)}{۲ \times ۱۰^{۵}} = ۴ \times ۱۰^{-۳}\, a$$

$$P_۲ - ۱۶۰ = ۴۰۰ \times ۴۰۰ \Rightarrow P_۲ = ۳۲۰\, kN$$

۱۲-۳. مطلوب است تعیین واکنش سمت چپ میلهٔ نشان داده شده در شکل. سطح مقطع میله ثابت و رابطهٔ تنش کرنش برای مصالح میله به‌صورت $\sigma = K\varepsilon^n$ می‌باشد که در آن K و n ضرایب ثابتی هستند.



مسأله ۱۲-۳

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = K\varepsilon^n\\ \sigma = P/A\end{array}\right\} \to K\varepsilon^n = P/A \to \varepsilon = \left(\frac{P}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} \to \delta l = \left(\frac{P}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} l$$

$$R_A + R_B = P \to R_B = P - R_A$$

با استفاده از فرمول به دست آمده برای تغییر طول، تغییر طول دو قسمت میله را به دست می‌آوریم

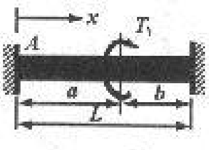
$$\delta l_۱ = \left(\frac{R_A}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} .\, a \qquad \delta l_۲ = -\left(\frac{R_B}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} .\, b$$

اما می‌دانیم تغییر طول کل میله صفر است بنابراین:

$$\delta l_۱ + \delta l_۲ = ۰ \to \left(\frac{R_A}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} .a - \left(\frac{R_B}{KA}\right)^{\frac{۱}{n}} .b = ۰ \xrightarrow{R_B = P - R_A} (R_A)^{\frac{۱}{n}} .a - (P - R_A)^{\frac{۱}{n}} .b = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P - R_A}{R_A} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{و یا} \quad \frac{P}{R_A} - ۱ = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow R_A = \frac{P}{[(a/b)^n + ۱]}$$

۱۲-۴. مطلوب است تعیین لنگرهای پیچشی تکیه‌گاهی برای محور استوانه‌ای نشان داده شده در شکل. میله از مصالح ارتجاعی و سطح مقطع آن ثابت می‌باشد.



مسأله ۱۲-۴

$$T_A + T_B = T_۱ \to T_B = T_۱ - T_A \qquad (۱)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{T_A a}{GJ} = \frac{T_B b}{GJ} \xrightarrow{(1)} T_A a = (T_1 - T_A)\, b$$

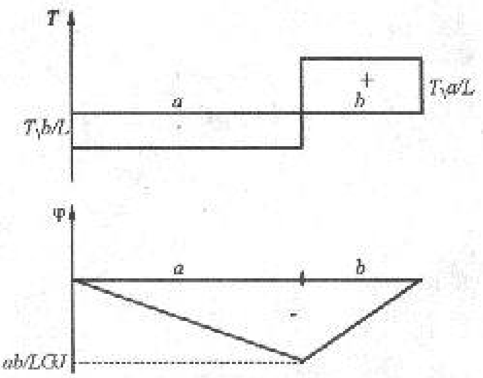
$$\rightarrow T_A (a+b) = T_1 b \rightarrow T_A = T_1 b/L$$

$$(1) \rightarrow T_B = T_1 - \frac{T_1 b}{L} = \frac{(L-b)\, T_1}{L} = T_1\, a/L$$

۱۲-۵. میلهٔ مسألهٔ قبل را در نظر بگیرید. با فرض رفتار ارتجاعی، واکنشهای تکیه‌گاهی را تعیین نموده و ترسیمهٔ تغییرات لنگر پیچشی و زاویه پیچشی را رسم نمایید. (ب) اگر قطر میله مساوی ۵۰ میلی‌متر و a مساوی ۷۵۰ میلی‌متر و b مساوی ۵۰۰ میلی‌متر باشد، رابطهٔ بین زاویهٔ پیچش ϕ در نقطهٔ x مساوی ۷۵۰ میلی‌متر و لنگر پیچشی T_1 را رسم نمایید. نموداری شبیه به شکل ۱۲-۱-ث رسم کنید. مصالح را ارتجاعی - خمیری کامل فرض کنید و تنش برشی جاری را مساوی ۱۳۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

از حل مسأله قبل داریم:

$$T_A = \frac{T_1 b}{L} \quad , \quad T_B = \frac{T_1 a}{L}$$



$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\frac{T_1 b}{L}.a}{GJ} = \frac{T_1 a b}{LGJ}$$

$$\varphi_{(۷۵۰)} = \frac{T_1 \times ۷۵۰ \times ۵۰۰}{(۱۲۵۰)\times(۰/۸\times ۱۰^۵)\left[\frac{\pi}{۲}(۲۵)^۴\right]}$$

$$= ۶/۱۱ \times ۱۰^{-۹}\, T_1 \qquad (۱)$$

$$\tau_A = \frac{T_A c}{J} = \frac{T_1 bc}{LJ}$$

$a > b \rightarrow \tau_B > \tau_A \rightarrow$ قسمت راست میله زودتر به تسلیم می‌رسد

$$\tau_B = \frac{T_B c}{J} = \frac{T_1 ac}{LJ}$$

$$\tau_B = ۱۳۰ (MPa) = \frac{T_{yp} \times ۷۵۰ \times ۲۵}{۱۲۵۰ \times \frac{\pi}{۲}(۲۵)^۴} \rightarrow T_{yp} = ۵۳۱۷/۸\, N.m \quad T_{By} = \frac{a}{L} T_1 = ۳۱۹۰/۷\, N.m$$

وقتی T_1 به مقدار فوق برسد، سمت راست میله شروع به جاری شدن می‌کند. در این حالت زاویه دوران برابر است با:

$$(۱) \Rightarrow \varphi = ۶/۱۱ \times ۱۰^{-۹} \times (۵۳۱۷/۸ \times ۱۰^۳ (N.mm)) = ۳۲/۵ \times ۱۰^{-۳}\ rad$$

با افزایش T_1، ناحیه پلاستیک به‌طرف مرکز مقطع دایره‌ای گسترش می‌یابد تا جایی‌که تمام مقطع را در برمی‌گیرد. اگر T_y گشتاور مربوط به شروع جاری شدن بوده و T_p گشتاور مربوط به جاری شدن تمام

مقطع باشد. رابطه زیر بین آندو برقرار است (رابطه ۵-۱۷):

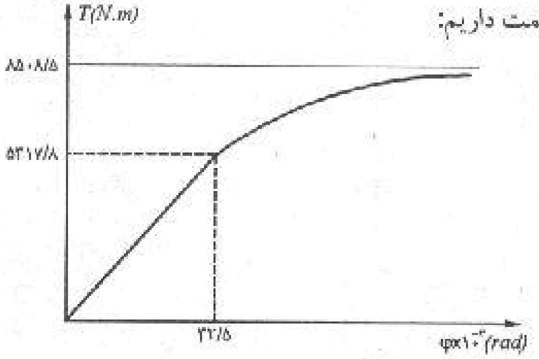
$$T_p = \frac{۴}{۳} Ty$$

بنابراین:

$$T_p = \frac{۴}{۳}(۳۱۹۰/۷) = ۴۲۵۴/۲۴ N.m$$

گشتاور نهایی مربوط به حالتی است که قسمت چپ میله هم به این حد برسد. با توجه به یکسان بودن مقطع دو قسمت داریم:

$$T_u = ۲T_p = ۸۵۰۸/۵ N.m$$



۱۲-۶. **یک جرم ۱/۰۲ مگاگرمی توسط دو میله که طول آنها نزدیک ۳ متر است، آویزان است. یکی از میله‌ها از فولاد با ضریب ارتجاعی ۱۰⁵ × ۲ نیوتن بر میلی‌متر مربع و دیگری از آلومینیوم با ضریب ارتجاعی ۱۰⁵ × ۰/۷ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. سطح مقطع هر دو میله مساوی ۱۲۰ میلی‌متر مربع است. برای اینکه بار به طور مساوی بین دو میله تقسیم شود، کدام یک از میله‌ها و به چه میزان باید کوتاهتر ساخته شود. رفتار دو میله را ارتجاعی در نظر بگیرید.**

$$m = ۱/۰۲ \times ۱۰^۶ gr = ۱۰۲۰ kg$$

مسأله ۱۲-۶

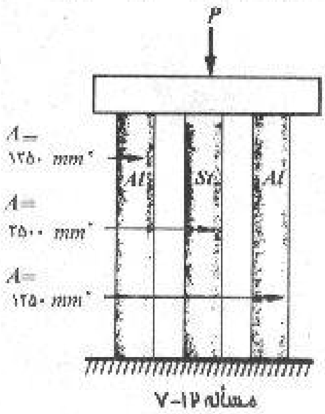
$$P = \frac{w}{۲} = \frac{۱۰۲۰ \times ۱۰}{۲} = ۵۱۰۰ N$$

$$\delta_{st} = \frac{PL}{AE_{st}} = \frac{۵۱۰۰ \times ۳۰۰۰}{(۱۲۰)(۲ \times ۱۰^۵)} = ۰/۶۳۷ mm$$

$$\delta_{Al} = \frac{PL}{AE_{Al}} = \frac{۵۱۰۰ \times ۳۰۰۰}{(۱۲۰)(۰/۷ \times ۱۰^۵)} = ۱/۸۲۱ mm$$

$$\delta = \delta_{Al} - \delta_s = ۱/۱۸۳ mm$$

۱۲-۷. یک صفحهٔ صلب در روی دو میلهٔ آلمینیومی به طول ۲۵۰ میلی‌متر قرار دارد. میلهٔ سومی از فولاد به طول ۲۴۹/۹ میلی‌متر در وسط دو میلهٔ نوق قرار دارد. اگر بار P به مقدار ۵۰۰ کیلونیوتن به صفحه وارد شود، تنش در میلهٔ فولادی و تغییر شکل میله‌های آلمینیومی را به‌دست آورید. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی ۱۰⁵ × ۲ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلمینیوم مساوی ۱۰⁵ × ۰/۷ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۱۲-۷

ابتدا مقدار نیرویی را که برای از بین بردن اختلاف طول میله‌های آلومینیومی با میله فولادی لازم است را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_{\circ} = \frac{\frac{P_{\circ}}{۲} L_A}{A_A E_A} \rightarrow P_{\circ} = \frac{۲ \times ۰/۱ \times ۱۲۵۰ \times ۰/۷ \times ۱۰^۵}{۲۵۰} = ۷۰\, kN \quad P' = ۵۰۰ - ۷۰ = ۴۳۰\, kN$$

نیروی باقیمانده ($۴۳۰\, kN$) باعث ایجاد تغیر طولهای مساوی در میله‌ها می‌گردد.

$$\delta_A = \delta_s \Rightarrow \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{P_s L_s}{A_s E_s} \Rightarrow \frac{(P_A)(۲۵۰)}{(۱۲۵۰)(۰/۷ \times ۱۰^۵)} = \frac{(P_s)(۲۴۹/۹)}{(۲۵۰۰)(۲ \times ۱۰^۵)} \rightarrow P_s = ۵/۷ P_A \quad (۱)$$

$$۲P_A + P_s = ۴۳۰\, kN \quad (۲)$$

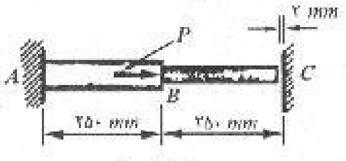
با حل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$P_s = ۳۱۷/۶ kN \quad و \quad P_A = ۵۵/۷ kN$$

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{۳۱۷۶۰۰}{۲۵۰۰} = ۱۲۷\, MPa$$

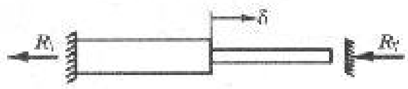
$$\delta_A = \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{(۵۵۷۰۰)(۲۵۰)}{(۱۲۵۰)(۰/۷ \times ۱۰^۵)} = ۰/۱۶\, mm$$

۸-۱۲. مطابق شکل، میله‌ای در تکیه‌گاه A گیردار شده و تحت بار متمرکز P قرار دارد. میله از مصالح ارتجاعی - خمیری کامل با ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش جاری شدن ۲۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع ساخته شده است. قبل از بارگذاری، شکافی به عرض ۲ میلی‌متر بین انتهای میله و تکیه‌گاه ثابت C وجود دارد. مطلوب است رسم نمودار بار- تغییر مکان برای نقطهٔ تأثیر نیرو با فرض اینکه P از صفر تا بار نهایی میله افزایش پیدا کند. سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۲۰۰ میلی‌مترمربع و از B تا C مساوی ۱۰۰ میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۸-۱۲

تا زمانی که انتهای میله به دیواره سمت راست نرسیده است، نیروی $R_۱$ از طرف تکیه‌گاه سمت چپ به میله وارد می‌شود. وقتی فاصله $۲\, mm$ از بین رفت، نیروی $R_۲$ هم از طرف تکیه‌گاه سمت راست اعمال می‌گردد.



$$\delta = \frac{R_۱ L}{A_۱ E} \quad و \quad \sigma_۱ = \frac{R_۱}{A_۱} = \frac{E}{L}\sigma$$

$$(\delta - ۲) = \frac{R_۲ L}{A_۲ E} \quad و \quad \sigma_۲ = \frac{R_۲}{A_۲} = \frac{E}{L}(\delta - ۲)$$

تسلیم میله اول: $\sigma_۱ = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L}\delta = \sigma_y \Rightarrow \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۲۵۰}\delta_۱ = ۲۰۰ \rightarrow \delta_۱ = ۰/۲۵\, mm$

تسلیم میلهٔ دوم: $\sigma_۲ = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L}(\delta - ۲) = \sigma_y \Rightarrow \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۲۵۰}(\delta_۲ - ۲) = ۲۰۰ \rightarrow \delta_۲ = ۲/۲۵mm$

یعنی وقتی δ به $۰/۲۵mm$ می‌رسد، میله اول به تسلیم می‌رسد و تسلیم میله دوم هنگامی رخ می‌دهد که $\delta = ۰/۲۵mm$ بنابراین مسأله باید در حالات زیر بررسی شود:

$\underline{\delta \leq ۰/۲۵}$: $P = R_۱ = \frac{EA_۱}{L}\delta = \frac{(۲\times۱۰^۵)(۲۰۰)}{۲۵۰}\delta \rightarrow P = ۱۶۰۰۰۰\delta$

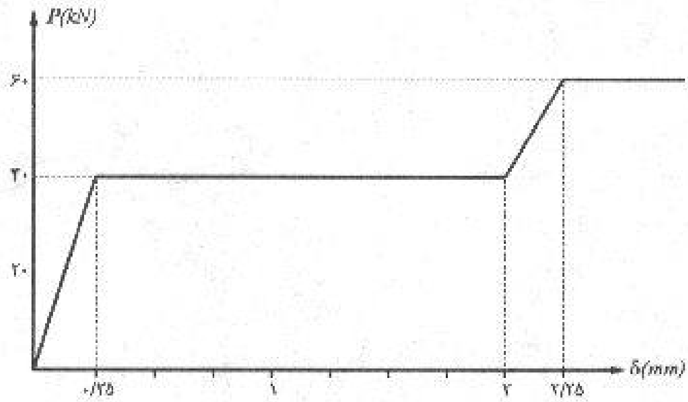
$$\delta = \delta_۱ = ۰/۲۵mm \rightarrow P_۱ = ۱۶۰۰۰۰ \times (۰/۲۵) \rightarrow P_۱ = ۴۰kN$$

$\underline{۰/۲۵ \leq \delta \leq ۲}$: $P = R_۱ = A_۱\sigma_y = ۲۰۰ \times ۲۰۰ = ۴۰۰۰۰N = ۴۰kN$

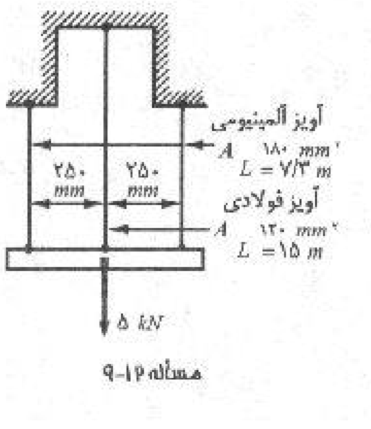
$\underline{۲ \leq \delta \leq ۲/۲۵}$: $P = R_۱ + R_۲ = ۴۰۰۰۰ + \frac{EA_۲}{L}(\delta - ۲) = -۱۲۰۰۰۰ + ۸۰۰۰۰۰\delta$

$$\delta = \delta_۲ = ۲/۲۵mm \rightarrow P_۲ = ۶۰۰۰۰N = ۶۰kN$$

$\underline{\delta \geq ۲/۲۵}$: $P = R_۱ + R_۲ = \sigma_y A_۱ + \sigma_y A_۲ = ۲۰۰(۲۰۰ + ۱۰۰) = ۶۰kN$



۱۲-۹. مطلوب است تعیین نیروهای موجود در آویزهای دستگاه نشان داده شده در شکل با فرض اینکه میلهٔ افقی کاملاً صلب باشد. آویزهای خارجی از آلومینیوم با ضریب ارتجاعی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ و آویز داخلی از فولاد با ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



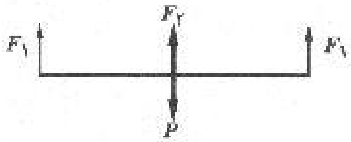
مسأله ۱۲-۹

$$\delta_A = \delta_s \Rightarrow \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{P_s L_s}{A_s E_s} \Rightarrow \frac{۷۳۰۰\, P_A}{(۱۸۰)(۰/۷ \times ۱۰^۵)} = \frac{۱۵۰۰۰\, P_s}{(۱۲۰)(۲\times۱۰^۵)}$$

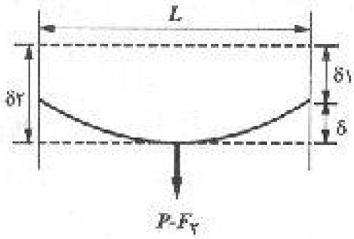
$$\rightarrow P_s = ۱/۰۸ P_A \quad (۱) \qquad \rightarrow \qquad P_A = ۱/۶۲\,kN$$

$$۲P_A + P_s = ۵\,kN \quad (۲) \qquad\qquad P_s = ۱/۷۵\,kN$$

۱۲-۱۰. اگر میلهٔ مسأله ۱۲-۹ صلب نباشد و لنگر ماند (ممان اینرسی) آن مساوی ۹۰×۱۰^۳ میلیمتر به توان چهار فرض شود، نیروهای تولید شده در آویزها چقدر خواهد بود. جنس میله را از فولاد با ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمترمربع فرض کنید.



$$\delta_۱ = \frac{F_۱ L_۱}{A_۱ E_۱} \quad , \quad \delta_۲ = \frac{F_۲ L_۲}{A_۲ E_۲} \quad , \quad \delta = \frac{(P - F_۲)\, L^۳}{۴۸EI}$$



$$\delta = \delta_۲ - \delta_۱ \Rightarrow \frac{(P - F_۲)L^۳}{۴۸EI} = \frac{F_۲ L_۲}{A_۲ E_۲} - \frac{F_۱ L_۱}{A_۱ E_۱}$$

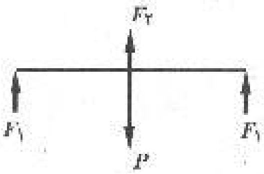
$$\Rightarrow F_۲ = \left(\frac{L_۲}{A_۲E_۲} + \frac{L^۳}{۴۸EI}\right) - F_۱\left(\frac{L_۱}{A_۱E_۱}\right) = \frac{PL^۳}{۴۸EI} \quad (۱)$$

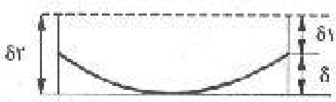
$$F_۲ + ۲F_۱ = P \quad (۲) \qquad \text{از تعادل:}$$

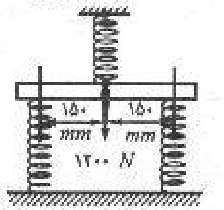
با جاگذاری مقادیر، معادله (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} ۷۶۹/۶۷F_۲ - ۵۷۹/۳۶F_۱ = ۷۲۳/۳۵ \\ F_۲ + ۲F_۱ = ۵ \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} F_۱ = ۱/۴۷\,kN \\ F_۲ = ۲/۰۵\,kN \end{matrix}$$

۱۲-۱۱. مطلوب است تعیین نیروهای به وجود آمده در فنر زیر. ثابت فنر برای فنر فوقانی مساوی $۲۰\,kN/mm$ و برای هر یک از فنرهای تحتانی مساوی $۱۰\,kN/mm$ می‌باشد. EI میلهٔ افقی را مساوی $۱۱/۲۵ \times ۱۰^۶$ کیلونیوتن در میلی‌مترمربع فرض نمایید.







مسئله ۱۲-۱۱

$$\delta_۱ = \frac{F_۱}{K_۱} \quad , \quad \delta_۲ = \frac{F_۲}{K_۲} \quad , \quad \delta = \frac{(P - F_۲)\, L^۳}{۴۸EI}$$

$$\delta = \delta_۲ - \delta_۱ \rightarrow \frac{(P - F_۲)\, L^۳}{۴۸EI} = \frac{F_۲}{K_۲} - \frac{F_۱}{K_۱} \rightarrow F_۲\left(\frac{۱}{K_۲} + \frac{L^۳}{۴۸EI}\right) - \frac{F_۱}{K_۱} = \frac{PL^۳}{۴۸EI}$$

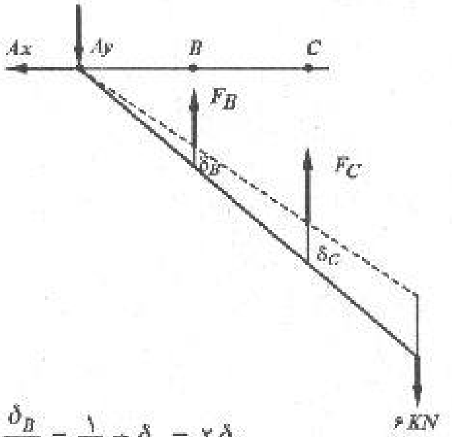
$\Rightarrow ۱۰^{-۴} F_۲ - ۱۰^{-۴} F_۱ = ۰/۰۶$ و یا $F_۲ - F_۱ = ۶۰۰ N$ (۱)

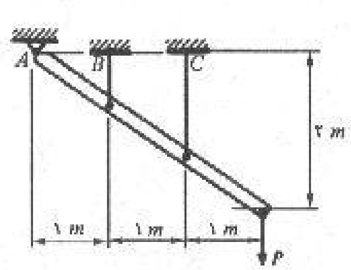
$\sum F_y = ۰ : ۲F_۱ + F_۲ = P$ (۲)

از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$F_۱ = ۲۰۰ N \quad , \quad F_۲ = ۸۰۰ N$

۱۲-۱۲. یک میلهٔ صلب توسط یک تکیه‌گاه مفصلی در A و دو آویز ارتجاعی در نقاط B و C مطابق شکل تکیه داده شده است. سطح مقطع آویز B مساوی ۶۰ میلی‌متر مربع و آویز C مساوی ۱۲۰ میلی‌مترمربع می‌باشد. مطلوب است تعیین واکنشهای A و B و C در اثر نیروی P مساوی ۶ کیلونیوتن.





مسأله ۱۲-۱۲

$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{۱}{۲} \to \delta_c = ۲\delta_B$$

$$\Rightarrow \frac{F_c L_c}{A_c E_c} = ۲\frac{F_B L_B}{A_B E_B} \Rightarrow \frac{F_c \times \frac{۴}{۳}}{۱۲۰E} = ۲\,\frac{F_B \times \frac{۲}{۳}}{۶۰E} \Rightarrow F_c = ۲F_B \qquad (۱)$$

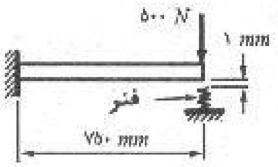
$$\sum M_A = ۰ : F_B \times ۱ + F_c \times ۲ = ۶ \times ۳ \quad F_B + ۲F_c = ۱۸ kN \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\to F_B = ۳/۶ kN \quad , \quad F_c = ۷/۲ kN$

$$\sum F_y = ۰ \; : A_y = F_B + F_c - ۶ = ۱۰/۸ - ۶ = ۴/۸ kN$$

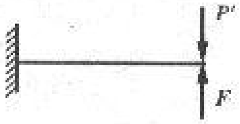
$$\sum F_x = ۰ \; : A_x = ۰$$

۱۲-۱۳. یک تیر طره‌ای به طول ۷۵۰ میلی‌متر و $EI = ۱۰^{۱۰}$ نیوتن میلی‌مترمربع، در حالی که شکافی به عرض ۱ میلی‌متر بین انتهای آزاد آن و یک فنر وجود دارد، مفروض است. ثابت فنر مساوی ۲ کیلونیوتن بر میلی‌متر است. اگر نیرویی مساوی ۵۰۰ نیوتن بر انتهای این تیر طره‌ای وارد گردد، چه نیرویی در فنر تولید می‌گردد.



مسأله ۱۲-۱۳

$$\delta_0 = \frac{P_0 L^3}{3EI} \Rightarrow P_0 = \frac{3EI\,\delta_0}{L^3} = \frac{3 \times 10^{10} \times 1}{(750)^3} = 71/1\,N$$



$$P' = P - P_0 = 500 - 71/1 \rightarrow P' = 428/9\,N$$

$$\delta_{P'} - \delta_F = \delta \Rightarrow \frac{P' L^3}{3EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{K}$$

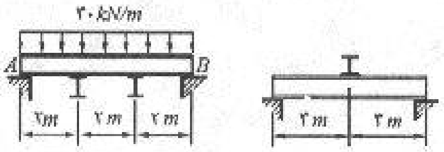
$$\frac{428/9 \times (750)^3}{3 \times 10^{10}} = \frac{F \times (750)^3}{3 \times 10^{10}} + \frac{F}{2000} \rightarrow F = 414/2\,N$$

راه حل دوّم:

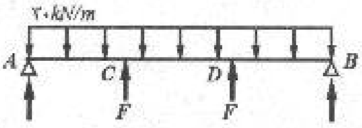
$$P + F = 500 \qquad (1)$$

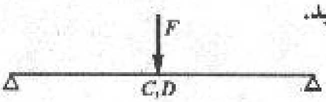
$$\delta_{تیر} = \delta_{فنر} + 1 \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F}{K} + 1 \quad (2)$$

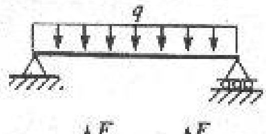
۱۲-۱۴. مطابق شکل، یک تیر $IPE200$ در نقاط A و B به صورت ساده تکیه داده شده و در نقاط $\frac{1}{3}$ میانی از روی دو تیر $IPE200$ عبور کرده است. در هنگام نصب، تیرهای عرضی کاملاً به تیر AB تماس داده شده‌اند. نمای جانبی تیرهای عرضی نیز در شکل سمت راست نشان داده شده است. اگر بار گستردهٔ یکنواختی به شدت ۳۰ کیلونیوتن بر متر بر تیر AB وارد شود، واکنشهای تکیه‌گاهی A و B چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.



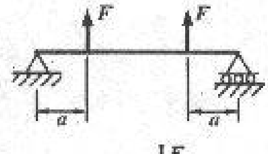
مسأله ۱۴-۱۲



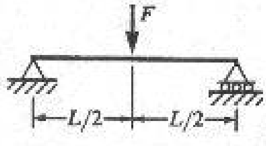




$$v_1 = \frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \xrightarrow{x = \frac{L}{3}} v_1 = \frac{11qL^4}{972EI}$$



$$v_2 = \frac{Fa^2}{6EI}(3L - 4a) \xrightarrow{a = \frac{L}{3}} v_2 = \frac{5FL^3}{162EI}$$



$$\Delta_C = \Delta_D = -\frac{11qL^4}{972EI} + \frac{5FL^3}{162EI} \qquad (1)$$

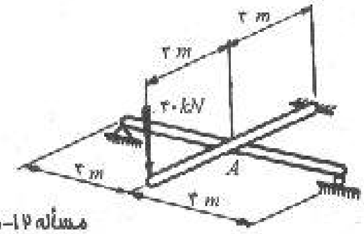
$$\Delta_C = \Delta_D = -\frac{FL^۳}{۴۸EI} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \to F\,\frac{۴۴qL}{۲۰۱} = \frac{۴۴ \times ۳۰ \times ۶}{۲۰۱} = ۳۹/۴\,kN$$

از تقارن $\to R_A = R_B$

$$\sum F_y = ۰: \quad ۲R_A + ۲F = qL \to R_A = R_B = \frac{qL}{۲} - F = ۵۰/۶\,kN$$

۱۲-۱۵. **مطلوب است تعیین تغییر مکان نقطهٔ A از سازه نشان داده شده در شکل. قبل از بارگذاری، دو تیر در نقطهٔ A کاملاً در تماس بودند. سختی خمشی هر دو تیر مساوی و برابر EI می‌باشد.**

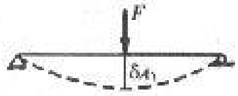


مسأله ۱۲-۱۵

تغییر مکان نقطه A روی هر دو تیر باید یکسان باشد:

$$\delta_{A_۱} = \delta_{A_۲}$$

$$\delta_{A_۱} = -\frac{FL^۳}{۴۸EI} = -\frac{F \times ۸^۳}{۴۸EI} = -۱۰/۶۷\frac{F}{EI}$$ از جدول ۳ ضمیمه:



معادله خیز برای تیر کنسول با بار در انتها عبارت است از:

$$v = \frac{-P}{۶EI}(۲L^۳ - ۳L^۲x + x^۳)$$

$$x = \frac{L}{۲} \Rightarrow \delta'_۲ = -\frac{۴۰ \times ۱۰^۳}{۶EI}\left[۲L^۳ - ۳L^۲\left(\frac{L}{۲}\right) + \left(\frac{L}{۲}\right)^۳\right] = \frac{-۴۰ \times ۱۰^۳}{۶EI} \times \frac{۵L^۳}{۸}$$

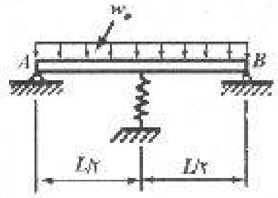
$$\xrightarrow{L = ۶m} \quad \delta'_۲ = -\frac{۹ \times ۱۰^۵}{EI}$$

$$\delta''_۲ = +\frac{F\left(\frac{L}{۲}\right)^۳}{۳EI} = +\frac{F(۳)^۳}{۳EI} = \frac{۹F}{EI} \qquad \delta_{A_۲} = \delta'_۲ + \delta''_۲ = -\frac{۹ \times ۱۰^۵}{EI} + \frac{۹F}{۳EI}$$

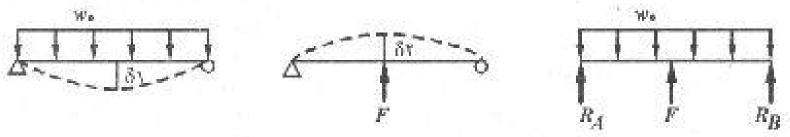
$$\delta_{A_۱} = \delta_{A_۲} \Rightarrow -۱۰/۶۷\frac{F}{EI} = -\frac{۹ \times ۱۰^۵}{EI} + \frac{۹F}{EI} \to F = ۴۵۷۵۵\,N$$

$$\delta_A = -\frac{FL^۳}{۴۸EI} = -\frac{۴۵۷۵۵ \times ۸^۳}{۴۸EI} = -\frac{۵۲۰۶ \times ۱۰^۲}{EI}$$ (EI بر حسب نیوتن در مترمربع)

۱۲-۱۶. مطلوب است تعیین سختی فنر نشان داده شده در شکل به طوری که واکنش هر سه تکیه‌گاه با یکدیگر مساوی شود. برای تعیین تغییر مکان تیر از جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید.



مسأله ۱۲-۱۶



با استفاده از جدول ۳ ضمیمه:

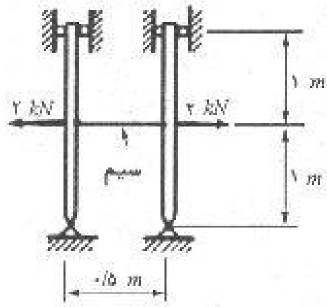
$$\delta_1 = +\frac{5w_0L^4}{384EI} \quad \text{و} \quad \delta_2 = \frac{FL^3}{48EI}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_A + F + R_B = w_0L \\ R_A = R_B = F \end{array}\right\} \rightarrow F = \frac{w_0L}{3} \rightarrow \delta = \frac{F}{k} = \frac{w_0L}{3k}$$

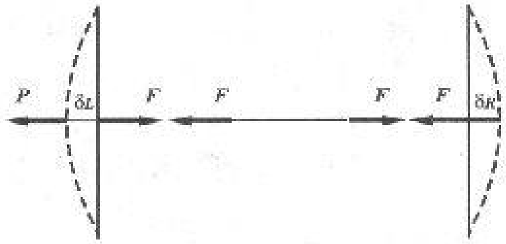
$$-\delta = -\delta_1 + \delta_2 \rightarrow -\frac{F}{k} = -\frac{5w_0L^4}{384EI} + \frac{FL^3}{48EI} \Rightarrow \frac{w_0L}{3k} = -\frac{5w_0L^4}{384EI} + \frac{w_0L^4}{144EI}$$

$$-\frac{1}{k} = \frac{-5L^3}{128EI} + \frac{L^3}{48EI} = \frac{-112L^3}{128 \times 48EI} \rightarrow \left| K = \frac{384EI}{7L^3} \right|$$

۱۲-۱۷. دو تیر قائم به طول ۲ متر توسط یک سیم محکم در وسط ارتفاع به یکدیگر متصل شده‌اند. EI تیر سمت چپ مساوی ۵۰ کیلونیوتن در مترمربع و EI تیر سمت راست مساوی ۱۵۰ کیلونیوتن در مترمربع می‌باشد. سطح مقطع سیم مساوی ۶۵ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آن مساوی 70×10^6 کیلونیوتن بر مترمربع می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش در سیم پس از اعمال دو نیروی ۲ کیلونیوتنی نشان داده شده در شکل. برای حل مسأله از روابط تغییر شکل جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید.



مسأله ۱۲-۱۷



$$\delta_L = \frac{(P-F)\,L^۳}{۴۸(EI)_L} = \frac{(۲-F)\times ۲^۳}{۴۸\times ۵۰} = \frac{۲-F}{۳۰۰}$$

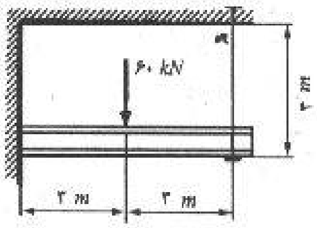
$$\delta_R = \frac{(P-F)\,L^۳}{۴۸(EI)_R} = \frac{(۲-F)\times ۲^۳}{۴۸\times ۱۵۰} = \frac{۲-F}{۹۰۰}$$

$$\delta_C = \frac{FL}{AE} = \frac{F\times ۰/۵}{(۶۵\times ۱۰^{-۶})(۷۰\times ۱۰^{۶})} = \frac{F}{۹۱۰۰}$$

$$\delta_L + \delta_R = \delta_C \Rightarrow \frac{۲-F}{۳۰۰} + \frac{۲-F}{۹۰۰} = \frac{F}{۹۱۰۰} \Rightarrow F = ۱/۹۵\,kN$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{۱۹۵۰}{۶۰} = ۳۰\ N/mm^۲$$

۱۲-۱۸. یک انتهای تیری از نیمرخ IPE ۴۵۰ در داخل بتن گیردار شده است. هدف این بود که انتهای دیگر آن مطابق شکل توسط یک میله به طول ۴ متر و به مقطع ۵۰۰ میلی‌مترمربع نگه داشته شود. لیکن در هنگام نصب میله کاملاً محکم نشد به طوری که بین سطح فوقانی مهره و سطح تحتانی تیر شکافی به عرض ۱۰ میلی‌متر باقی ماند. حال اگر در این حالت یک بار متمرکز ۶۰ کیلونیوتنی بر وسط تیر وارد گردد، چه نیرویی در میله به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.



مسئله ۱۲-۱۸

ابتدا نیروی لازم برای از بین رفتن شکاف بین مهره و تیر را حساب کنیم:

$$\delta_۰ = \delta_۱ + a\theta_۱$$

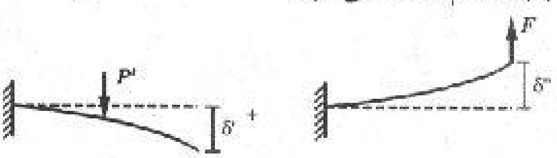
$$\delta_۱ = \frac{P_۰ a^۳}{۳EI} \quad و \quad \theta_۱ = \frac{P_۰ a^۲}{۲EI} \rightarrow \delta_۰ = \frac{۵P_۰ a^۳}{۶EI}$$

پس:

$$P_۰ = \frac{۶EI\,\delta_۰}{۵a^۳} = \frac{(۶)(۲\times ۱۰^۵)(۳۳۷۴۰\times ۱۰^۴)(۱۰)}{۵(۳۰۰۰)^۳} \Rightarrow P_۰ = ۳۰\,kN$$

یعنی وقتی که نیرو به ۳۰ kN می‌رسد، فاصله از بین رفته و مهره با تیر تماس حاصل می‌کند. از آن به‌بعد سیم کشیده می‌شود.

$$P' = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰\,kN$$



تغییر مکان نوک تیر که خود ناشی از دو نیروی P' و F می‌باشد برابر است با تغییر طول سیم:

$$\delta' - \delta'' = \delta_c$$

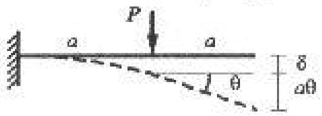
$$\delta' = \frac{P'.a^۳}{۳EI} + a \times \frac{P'.a^۲}{۲EI} \quad a = ۳۰۰۰ \Rightarrow \delta' = ۱۰\, mm$$

$$\delta'' = \frac{FL^۳}{۳EI} = \frac{F(۶۰۰۰)^۳}{۳(۲\times۱۰^۵)(۳۳۷۴۰\times۱۰^۴)} = (۱/۰۶۷\times۱۰^{-۳})F$$

$$\delta_c = \frac{FL_c}{A_cE_c} = \frac{F(۴۰۰۰)}{(۵۰۰)(۲\times۱۰^۵)} = (۴\times۱۰^{-۵})F$$

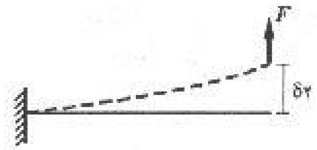
$$\delta' - \delta'' = \delta_c \Rightarrow ۱۰ - (۱/۰۶۷\times۱۰^{-۳})F = (۴\times۱۰^{-۵})F \rightarrow F = ۹۷۳۷N$$

راه حل دوّم:



$$\delta_۱ = \delta + a\theta = \frac{Pa^۳}{۳EI} + a.\frac{Pa^۲}{۲EI} = \frac{۵Pa^۳}{۶EI} = ۲۰\, mm$$

$$\delta_۲ = \frac{-FL^۳}{۳EI} = -۱/۰۶۷\times۱۰^{-۳}\,F$$



$$\delta_c = \frac{FL_c}{AE_c} = \frac{F\times۴۰۰۰}{(۵۰۰)(۲\times۱۰^۵)} = ۴\times۱۰^{-۵}F$$

$$\delta_۱ + \delta_۲ = ۱۰ + \delta_c \Rightarrow F = ۹۷۳۷N$$

۱۲-۱۹. اگر در مسأله ۱۲-۱، علاوه بر نیروهای $P_۱$ و $P_۲$، کاهشی مساوی ۵۰ درجهٔ سانتیگراد در درجهٔ حرارت رخ دهد، واکنش سمت راست چقدر خواهد بود. α را مساوی ۱۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد و ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظربگیرید.

$$P_۲ - P_۱ - R_A - R_B = ۰ \qquad (۱)$$

$$-\frac{P_۱\, a}{AE} + \frac{P_۲\,(a+b)}{AE} - (۲a+b)\,\alpha\,(\delta T) = \frac{R_B(۲a+b)}{AE}$$

$$-\frac{(۹۰\times۱۰^۳)(۱۵۰)}{(۱۲۰۰)(۲\times۱۰^۵)} + \frac{(۱۵۰\times۱۰^۳)(۴۵۰)}{(۱۲۰۰)(۲\times۱۰^۵)} - (۶۰۰)(۱۲\times۱۰^{-۶})(۵۰) = \frac{R_B\times۶۰۰}{(۱۲۰۰)(۲\times۱۰^۵)}$$

$$\Rightarrow R_B = -۵۴kN$$

$$(۱) \rightarrow ۱۵۰ - ۹۰ - R_A + ۵۴ = ۰ \Rightarrow R_A = ۱۱۴kN$$

۱۲-۲۰. اگر در مثال ۱۲-۶ به عوض پیچ و مهره از یک پرچ که در درجهٔ حرارت ۸۷۰° درجهٔ سانتیگراد هیچگونه تنش داخلی در آن موجود نیست، استفاده گردد، وقتی که درجهٔ حرارت به ۷۰ درجهٔ سانتیگراد می‌رسد، چه تنش کششی در پرچ به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی را

مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش جاری شدن را مساوی ۲۷۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و α را مساوی ۱۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد فرض نمایید.

کاهش طول پرچ در اثر کاهش حرارت =

افزایش طول پرچ در اثر نیرو + کاهش طول و اشرها در اثر نیرو

$$\frac{FL}{A_۲E} + \frac{FL}{A_۱E} = \alpha L\Delta T \Rightarrow \frac{F}{E}\left(\frac{۱}{A_۱} + \frac{۱}{A_۲}\right) = \alpha\,\Delta T$$

$$\frac{F}{۲ \times ۱۰^۵}\left(\frac{۱}{۱۰۰۰} + \frac{۱}{۹۰۰۰}\right) = ۱۲ \times ۱۰^{-۶}(۸۰۰) \rightarrow F = ۱۷۲۸۰۰۰\,N$$

$$\text{تنش پرچ}: \sigma = \frac{F}{A_۱} = \frac{۱۷۲۸۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۱۷۲۸\,N/mm^۲ > \sigma_y = ۲۷۵\,N/mm^۲$$

چون تنش به دست آمده بزرگتر از تنش جاری شدن پرچ است پس:

$$\sigma_{\text{پرچ}} = ۲۷۵\,N/mm^۲$$

۱۲-۲۱. یک پیچ از چدن خاکستری به قطر ۲۰ میلی‌متر از داخل یک لولهٔ آلومینیومی به قطر داخلی ۲۵ و قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر و طول ۷۵ میلی‌متر عبور می‌کند. مهرهٔ پیچ در درجهٔ حرارت ۱۵ درجهٔ سانتیگراد طوری محکم شده که در لولهٔ غلاف تنشی مساوی ۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع ایجاد شده است. در چه درجه حرارتی تنش در تنهٔ پیچ دو برابر می‌شود. E و α مربوط به چدن به ترتیب مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ۱۱×۱۰^{-۶} بر درجه سانتیگراد و E و α مربوط به آلومینیوم به ترتیب مساوی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ۲۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد می‌باشد.

$$\sigma_۱A_۱ = \sigma_۲A_۲ \Rightarrow \sigma_۱ \times \left(\pi \times \frac{۲۰}{۴}\right)^۲ = ۴ \times \left[\frac{\pi}{۴}(۵۰^۲ - ۲۵^۲)\right] \Rightarrow \sigma_۱ = ۱۸/۷۶\,N/mm^۲$$

(تنش اولیه در پیچ)

$$\sigma'_۱ = ۲\sigma_۱ \Rightarrow \frac{F}{A_۱} = ۲\sigma_۱ \Rightarrow \frac{F}{۳۱۴} = ۲ \times ۱۸/۷۶ \rightarrow F = ۱۱۷۸۱\,N$$

تغییر طول لوله در اثر نیرو + تغییر طول پیچ در اثر نیرو $= \alpha_۲\,L\,(\Delta T) - \alpha_۱\,L(\Delta T)$

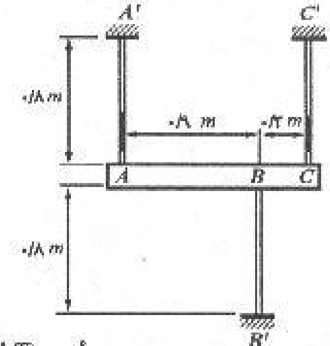
$$\frac{F\cancel{L}}{A_۱E_۱} + \frac{F\cancel{L}}{A_۲E_۲} = (\alpha_۲ - \alpha_۱)\cancel{L}\,\Delta T$$

$$۱۱۷۸۱\left(\frac{۱}{۳۱۴ \times (۰/۸ \times ۱۰^۵)} + \frac{۱}{۱۴۷۲/۶ \times (۰/۷ \times ۱۰^۵)}\right) = (۲۲ - ۱۱) \times ۱۰^{-۶}(\Delta T)$$

$$\rightarrow \Delta T = ۵۳C^\circ$$

۱۲-۲۲. مطابق شکل، میلهٔ صلب ABC توسط سه میلهٔ کششی نگهداری می‌شود. اعضای BB' و CC' تحت کاهش درجه حرارت ۵۰ درجه سانتیگراد قرار می‌گیرند. مطلوب است تعیین نیروی به وجود آمده در عضو CC'. سطح مقطع تمام اعضای کششی مساوی ۱۲۰۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی

مساوی $۰/۸ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و α مساوی ۱۰×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد می‌باشد.



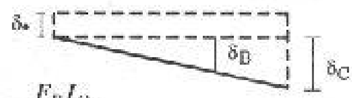
مسئله ۱۲-۲۲

$$\sum M_A = ۰ : F_c \times ۱/۲ = F_B \times ۰/۹ \rightarrow F_c = \frac{۳}{۴} F_B (۱)$$

$$\sum M_c = ۰ : F_A \times ۱/۲ = F_B \times ۰/۳ \rightarrow F_A = \frac{۱}{۴} F_B$$

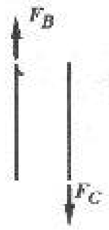
$$\delta_. = \frac{\frac{۱}{۴} F_B L}{AE} = \frac{F_B L}{۴AE}$$

$$\delta_B = L\alpha(\Delta T) - \frac{F_B L}{AE} - \delta_. \qquad \delta_c = \frac{F_c L}{AE} - L\alpha(\Delta T) - \delta_.$$



$$\frac{\delta_B}{۰/۹} = \frac{\delta_c}{۱/۲} \Rightarrow \delta_B = \frac{۳}{۴}\delta_c$$

$$L\alpha(\Delta T) - \frac{F_B L}{AE} - \frac{F_B L}{۴AE} = \frac{۳}{۴}\left(\frac{F_c L}{AE} - L\alpha(\Delta T) - \frac{F_B L}{۴AE}\right)$$



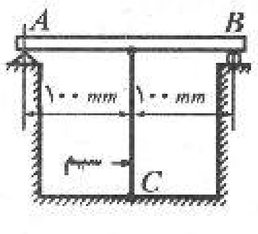
با استفاده از رابطه (۱) معادله اخیر به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$F_B = \frac{۱۴}{۱۳} AE\alpha T$$

$$F_B = \frac{۱۴}{۱۳}(۱۲۰۰)(۰/۸ \times ۱۰^{۵})(۱۰ \times ۱۰^{-۶})(۵۰) = ۵۱۶۹۲$$

$$F_c = \frac{۳}{۴} F_B = ۳۸۷۶۹ N$$

۱۲-۲۳. مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۷۵۰ میلی‌متر از وسط تیر آلومینیومی AB تا تکیه‌گاه C به طور محکم کشیده شده است. اگر درجهٔ حرارت به میزان ۵۰ درجهٔ سانتیگراد کاهش پیدا کند، افزایش تنش در سیم چقدر خواهد بود. برای تعیین تغییر شکل تیر از روابط جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید. سطح مقطع سیم مساوی ۰/۰۶ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آن مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. برای تیر آلومینیومی EI مساوی ۳×۱۰^{۶} نیوتن در میلیمترمربع می‌باشد. ضریب انبساط حرارتی فولاد مساوی ۱۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد و ضریب انبساط حرارتی آلومینیومی مساوی ۲۳×۱۰^{-۶} بر درجه سانتیگراد می‌باشد.



مسئله ۱۲-۲۳

$$\delta = \delta_T - \delta_F \qquad (۱)$$

δ_T: کاهش طول در اثر تغییر دما

δ_F: افزایش طول بر اثر نیروی ایجاد شده در سیم

$$\delta_T = L.\alpha(\Delta T) = (۷۵۰)(۱۲ \times ۱۰^{-۶})(۵۰) = ۰/۴۸ mm$$

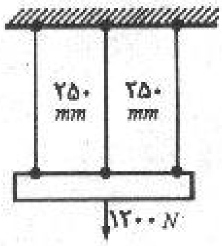
$$\delta_F = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times ۷۵۰}{(۰/۰۶)(۲ \times ۱۰^{۵})} = ۶/۲۵ \times ۱۰^{-۲}\, F$$

$$\delta = \frac{FL^{۳}}{۴۸EI} = \frac{F(۷۵۰)^{۲}}{(۴۸)(۳ \times ۱۰^{۶})} = ۲/۲۹\, F$$

$$(۱) \quad \longrightarrow \quad ۰/۴۸ - ۶/۲۵ \times ۱۰^{-۲} F = ۲/۲۹ F \rightarrow F = ۰/۱۶ N$$

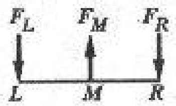
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{۰/۱۶}{۰/۰۶} = ۲/۶۷\, MPa$$

۱۲-۲۴. **سه آویز فولادی میلهٔ صلبی را که بر آن نیروی متمرکز ۱۲۰۰ نیوتن وارد می‌گردد، تحمل می‌نمایند. در ابتدا نیروی فوق به طور مساوی بین سه آویز تقسیم شده بود. اگر درجهٔ حرارت آویز دست راست ۴۰ درجهٔ سانتیگراد افزایش پیدا کند، هر کدام از آویزها چه سهمی از بار را حمل می‌کنند. برای هر سه آویز، ضریب ارتجاعی مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع، سطح مقطع مساوی ۱۰ میلی‌مترمربع و ضریب انبساط حرارتی مساوی ۱۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد می‌باشد.**



مسئله ۱۲-۲۴

در ابتدا نیروی $۱۲۰۰ N$ به نسبت مساوی بر سه آویز وارد می‌شود یعنی $F = ۴۰۰ N$ با افزایش حرارت سیم سمت راست نیروهای دیگری در سیمها به‌وجود می‌آید.



$$\sum M_L = ۰ \Rightarrow F_M = ۲F_R \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_L = F_R \qquad (۲)$$

$$\delta_R - \delta_L = ۲\delta_M \Rightarrow \left(L\,\alpha\,\Delta T - \frac{F_R L}{AE}\right) - \frac{F_L L}{AE} = ۲\frac{F_M L}{AE}$$

با به‌کار بردن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\alpha\Delta T = ۳\frac{F_M}{AE} \Rightarrow F_M = \frac{۱}{۳}AE\,\alpha\,\Delta T = \frac{۱}{۳}(۱۰)(۲ \times ۱۰^{۵})(۱۲ \times ۱۰^{-۶})(۴۰)$$

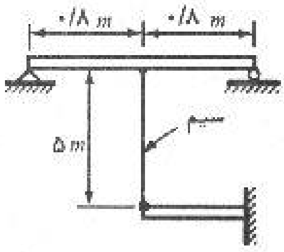
$$\Rightarrow F_M = ۳۲۰ N \qquad F_R = F_L = \frac{۳۲۰}{۲} = ۱۶۰ N$$

پس کل نیروهای وارد بر سیمها به قرار زیر می‌باشد:

میله وسط: $F = ۴۰۰ + ۳۲۰ = ۷۲۰ N$

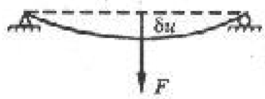
میله‌های کناری: $F = ۴۰۰ - ۱۶۰ = ۲۴۰ N$

۱۲-۲۵. **مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۵ متر و سطح مقطع ۱۶۰ میلیمتر مربع به طور محکم بین وسط یک تیر ساده و انتهای یک تیر طره‌ای کشیده شده است. اگر درجهٔ حرارت به میزان ۵۰ درجه سانتیگراد کاهش پیدا کند، تغییر مکان انتهای تیر طره‌ای چقدر خواهد بود. برای**



مسئله ۱۲-۲۵

سیم فولادی ضریب ارتجاعی مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع، ضریب انبساط حرارتی مساوی 12×10^{-6} بر درجهٔ سانتیگراد می‌باشد. لنگر ماند هر دو تیر مساوی 10×10^6 میلی‌متر به توان ۴ و ضریب ارتجاعی مساوی $0/1 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

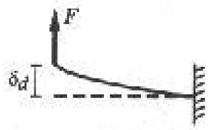


$$EI = (10 \times 10^6)(0/1 \times 10^5) = 10^{11}$$

$$\delta_u = \frac{FL_1^3}{48EI} = \frac{F(1600)^3}{48 \times 10^{11}} = 8/53 \times 10^{-4}F$$

$$\delta_d = \frac{FL_2^3}{3EI} = \frac{F(800)^3}{3 \times 10^{11}} = 0/171 \times 10^{-2}F$$

$$\delta_T = L_s\,\alpha(\Delta T) = 5000\,(12 \times 10^{-6})(50) = 3mm$$

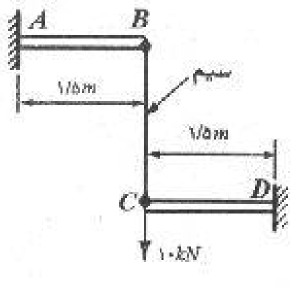


$$\delta_F = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times 5000}{(160)(2 \times 10^5)} = 1/56 \times 10^{-4}F$$

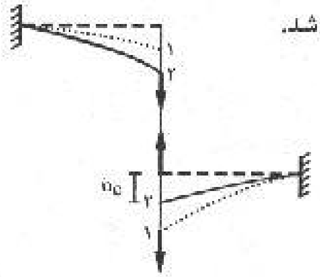
$$\delta_u + \delta_d = \delta_T - \delta_F \Rightarrow F = 3923/7N$$

$$\delta_d = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{2923/7 \times (800)^3}{3 \times 10^{11}} = 5mm$$

۱۲-۲۶. دو تیر طره‌ای فولادی AB و CD توسط سیم فولادی کاملاً سفت BC که طول آن در شرایط بدون بار اولیه مساوی ۴ متر می‌باشد، به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر یک بار متمرکز ۱۰ کیلونیوتنی بر نقطهٔ C وارد گردد و درجهٔ حرارت سیم به میزان ۵۰ درجهٔ سانتی‌گراد کاهش یابد، چه تنشی در سیم به وجود می‌آید. لنگر ماند دو تیر AB و CD مساوی 10×10^6 میلی‌متر به توان ۴ و ضریب ارتجاعی آنها مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. ضریب ارتجاعی سیم مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و سطح مقطع آن ۶۰ میلی‌مترمربع و ضریب انبساط حرارتی مساوی 12×10^{-6} بر درجهٔ سانتی‌گراد می‌باشد.



مسئله ۱۲-۲۶



$$v_C = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{FL^3}{3EI}$$

$$v_B = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{FL_c}{AE} - L_c\,\alpha\,(\Delta T)$$

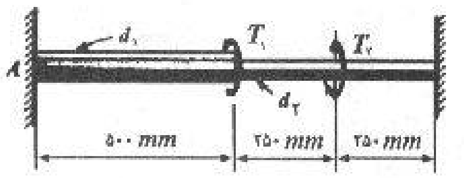
$$v_C - v_B = \delta \Rightarrow \left(\frac{PL^۳}{۳EI} - \frac{FL^۳}{۳EI}\right) - \frac{FL^۳}{۳EI} = \frac{FL_c}{AE} - L_c\,\alpha\,(\Delta T)$$

$$\frac{۱۰ \times ۱۰^۳ \times (۱۵۰۰)^۳}{۳(۲ \times ۱۰^۵)(۱۰ \times ۱۰^۶)} - \frac{۲F(۱۵۰۰)^۳}{۳ \times (۲ \times ۱۰^۵)(۱۰ \times ۱۰^۶)} = \frac{F \times ۴۰۰۰}{۶۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} - ۴۰۰۰(۱۲ \times ۱۰^{-۶})(۵۰)$$

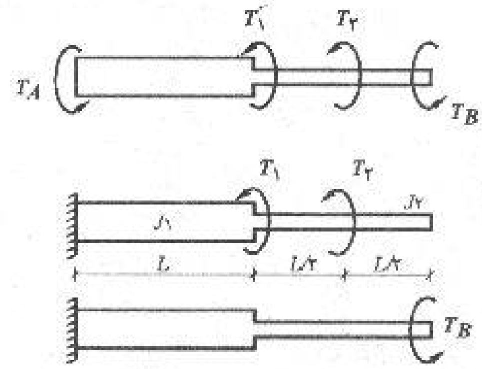
$$\Rightarrow F = ۵۵۰۴N$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = ۹۱/۷ MPa$$

۱۲-۲۷. یک محور استوانه‌ای توپر از جنس برنج در دو انتهای خود کاملاً گیردار است و دو لنگر پیچشی $T_۱$ به مقدار ۳۱/۴ نیوتن متر و $T_۲$ به مقدار ۶۲/۸ نیوتن متر، به آن تأثیر می‌کنند. (مطابق شکل). مطلوب است تعیین لنگر پیچشی تکیه‌گاهی در نقطهٔ A و رسم ترسیمهٔ تغییرات لنگر پیچشی و زاویه پیچش. رفتار مصالح را کاملاً ارتجاعی فرض کنید و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. قطر $d_۱$ مساوی ۸۰ و قطر $d_۲$ مساوی ۶۷/۳ میلی‌متر می‌باشد.



مسئله ۱۲-۲۷



$$T_۱ + T_۲ = T_A + T_B \qquad (۱)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه سمت راست وجود ندارد و میله آزادانه می‌پیچد. سپس اثر آن‌را به صورت یک کوپل اعمال می‌کنیم. زاویه پیچش در مجموع باید صفر باشد.

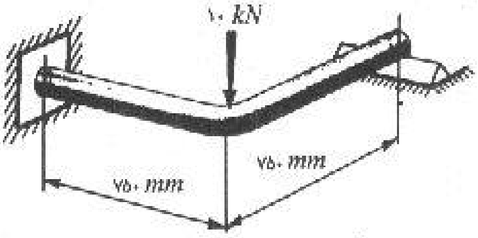
$$\frac{T_۱ L}{J_۱ G} + \frac{T_۲ L}{J_۱ G} + \frac{T_۲ \frac{L}{۲}}{J_۲ G} - \frac{T_B L}{J_۱ G} - \frac{T_B L}{J_۲ G} = ۰ \quad \text{و} \quad J = \frac{\pi}{۳۲} d^۴$$

$$\Rightarrow (T_۱ + T_۲)\, J_۲ + T_۲ J_۱ = T_B\,(J_۲ + J_۱) \Rightarrow T_B = ۷۳/۳ N.m$$

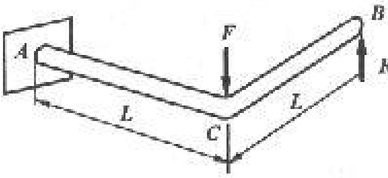
$$(۱) \Rightarrow T_A = ۲۰/۹ N.m$$

۱۲-۲۸. مطابق شکل محوری فولادی به شکل L در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر به صورت ساده تکیه داده شده است. زاویهٔ خم میله در پلان مساوی ۹۰ درجه می‌باشد. مطلوب است تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی محور فوق در اثر تأثیر بار ۱۰ کیلونیوتنی. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر

بگیرید. برای سهولت I را مساوی ۴۰۰×۱۰^{۲} و I_p را مساوی ۸۰۰×۱۰^{۲} میلی‌متر به توان ۴ در نظر بگیرید.



مسأله ۱۲-۲۸



ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه B وجود ندارد، سپس اثر آن را اعمال می‌کنیم. وقتی تکیه‌گاه B برداشته شود تغییر مکان نقطه B برابر تغییر مکان نقطه C می‌باشد که عبارت است از: $v = \frac{FL^{۳}}{۳EI}$ $(F = ۱۰^{۴} N)$

نیروی R_B به سه صورت باعث تغییر مکان نقطه B به‌طرف بالا می‌شود.

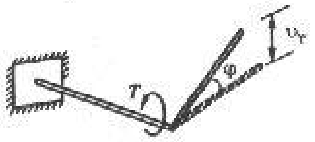
۱- تغییر مکان نقطه B نسبت به C

۲- تغییر مکان نقطه C نسبت به A که خود باعث تغییر مکان نقطه B به‌همان اندازه می‌شود.

۳- تغییر مکان نقطه B در اثر پیچش قسمت AC که به‌علت کوپل $(R_B \times L)$ رخ می‌دهد.

$$v_۱ = \frac{R_B L^{۳}}{۳EI}$$

$$v_۲ = \frac{R_B L^{۳}}{۳EI}$$



$$v_۳ = L.\varphi = L.\frac{TL}{JG} = L.\frac{(R_B L)L}{JG} = \frac{R_B L^{۳}}{JG}$$

چون در محل تکیه‌گاه B خیز صفر است پس: $v = v_۱ + v_۲ + v_۳$

$$\frac{FL^{۳}}{۳EI} = \frac{R_B L^{۳}}{۳EI} + \frac{R_B L^{۳}}{۳EI} + \frac{R_B L^{۳}}{JG}$$

$$EI = (۲ \times ۱۰^{۵})(۴۰۰ \times ۱۰^{۲}) = ۸ \times ۱۰^{۱۰} \quad و \quad JG = (۸۰۰ \times ۱۰^{۲})(۰/۸ \times ۱۰^{۵}) = ۶/۴ \times ۱۰^{۱۰}$$

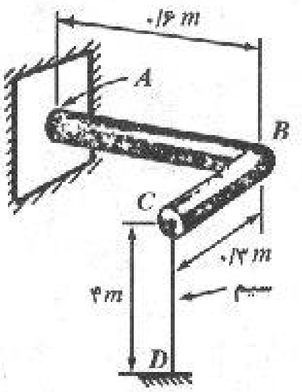
$$\Rightarrow R_B = ۱۷۴۰ N$$

$$\sum F_y = ۰ : R_A + ۱/۷۴ = ۱۰ \Rightarrow R_A = ۸/۲۶ kN$$

$$T_A = R_B L = ۱/۷۴ \times ۰/۷۵ \Rightarrow T_A = ۱/۳ kN.m$$

$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad M_A + ۱۰ \times ۰/۷۵ - ۱/۷۴ \times ۰/۷۵ = ۰ \Rightarrow M_A = -۶/۲ kN.m$$

۱۲-۲۹. مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۴ متر از انتهای زانوی ABC به طور کاملاً سفت به تکیه‌گاه صلب کشیده شده است. زانو از میلهٔ فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۲۰ میلی‌متر ساخته شده است. اگر درجهٔ حرارت سیم فولادی به مقدار ۸۰ درجهٔ سانتی‌گراد کاهش پیدا کند، تنشهای مؤثر بر جزء سطح A (واقع در بالای میله در تکیه‌گاه گیردار) را محاسبه نمایید. محاسبهٔ تنشهای اصلی لازم نیستند. سطح مقطع سیم مساوی ۶/۵ میلی‌مترمربع می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^{۵} و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب انبساط حرارتی را مساوی ۱۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد در نظر بگیرید.



مسئله ۱۲-۲۹

در اثر کاهش حرارت طول سیم کاهش می‌یابد و به‌همین دلیل نیروی کششی در آن ایجاد می‌شود.

افزایش طول در اثر نیرو - کاهش طول در اثر کاهش حرارت = کاهش طول سیم

$$\delta_C = \delta_T - \delta_P \qquad (۱)$$

$$\delta_T = L\,\alpha\,(\Delta T) = (۴۰۰۰)(۱۲ \times ۱۰^{-۶})(۸۰) = ۳/۸۴\,mm$$

$$\delta_P = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times ۴۰۰۰}{۶/۵ \times ۲ \times ۱۰^{۵}} = ۳۰/۷۷ \times ۱۰^{-۳}F$$

تغییر مکان نقطه C روی میله را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\delta_c = \delta_B + \delta_{C/B} + L_{CB} \times \varphi_{AB} \qquad (۲)$$

$$I = \frac{\pi r^{۴}}{۴} = \frac{\pi (۱۰)^{۴}}{۴} = ۷۸۵۴ \quad \text{و} \quad J = ۲I = ۱۵۷۰۸ \quad \text{و} \quad EI = ۱۵۷۰۸ \times ۱۰^{۵}$$

$$\delta_B = \frac{F L_{AB}^{۳}}{۳EI} = \frac{F(۶۰۰)^{۳}}{۳ \times (۲ \times ۱۰^{۵})(۷۸۵۴)} = ۴۵/۸۴ \times ۱۰^{-۳}\,F$$

$$\delta_{C/B} = \frac{F L_{CB}^{۳}}{۳EI} = \frac{F(۳۰۰)^{۳}}{۳ \times (۲ \times ۱۰^{۵})(۷۸۵۴)} = ۵/۷۳ \times ۱۰^{-۳}\,F$$

$$\varphi = \frac{T\,L_{AB}}{JG} = \frac{(F \times ۳۰۰) \times ۶۰۰}{(۱۵۷۰۸)(۰/۸۴ \times ۱۰^{۵})} = ۰/۱۳۶ \times ۱۰^{-۳}\,F$$

$$L_{CB} \cdot \varphi_{AB} = ۴۰/۸ \times ۱۰^{-۳}F$$

چون تغییر مکان نقطه C روی سیم و روی میله باید با هم برابر باشند بنابراین طرفین معادلات (۱) و (۲) را مساوی قرار می‌دهیم:

$$(۱) = (۲) \Rightarrow ۳/۸۴ - ۳۰/۷۷ \times ۱۰^{-۳} F = ۴۵/۸۴ \times ۱۰^{-۳} F + ۵/۷۳ \times ۱۰^{-۳} F + ۴۰/۸ \times ۱۰^{-۳} F$$

$$\Rightarrow F = ۳۱/۲ N$$

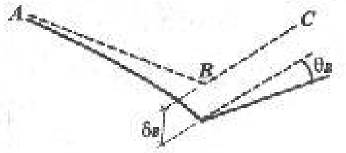
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(۳۱/۳ \times ۶۰۰)(۱۰)}{۷۸۵۴} = ۲۳/۸ MPa \quad \text{کششی}$$

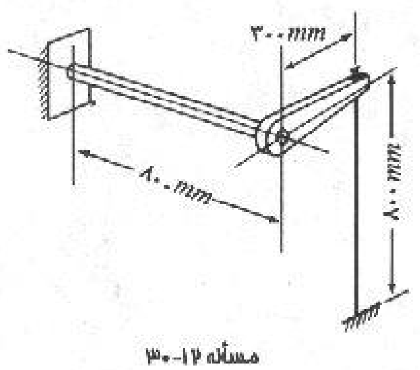
$$\tau = \frac{Tc}{I} = \frac{(۳۱/۳ \times ۳۰۰)(۱۰)}{۱۵۷۰۸} = ۵/۹۶ MPa$$

$$\tau' = \frac{VQ}{It}$$

در نقطه A: $(Q = ۰)$

۱۲-۳۰. مطابق شکل یک لولهٔ جدار نازک افقی در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر دارای بازویی که به طور کاملاً محکم به لوله متصل شده است، می‌باشد. میله قائمی که دارای کشش اولیه ۵۰۰ نیوتن می‌باشد، از داخل بازو عبور کرده است. اگر مهرهٔ میله طوری محکم شود که به اندازهٔ ۵ میلی‌متر در امتداد میله حرکت کند، مجموع نیرویی که در میله ایجاد می‌شود چقدر است. قطر متوسط لوله مساوی ۴۰ میلی‌متر و ضخامت آن $۵/\pi$ میلی‌متر می‌باشد. (سطح مقطع آن مساوی ۲۰۰ میلی‌متر و لنگر ماند قطبی آن مساوی ۸۰۰۰۰ میلی‌متر به توان چهار به دست می‌آید). سطح مقطع میله مساوی ۴/۶ میلی‌متر مربع می‌باشد. بازو را کاملاً صلب فرض کنید و ضریب ارتجاعی میله و لوله را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی برشی آنها را مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.





مسئله ۱۲-۳۰

$$\delta_{۱c} = \delta_B + a\theta_B \downarrow \qquad (۱)$$

$$\delta_{۲c} = \frac{FL}{AE} \uparrow \qquad (۲)$$

$$\delta_{۱c} + \delta_{۲c} = ۵mm$$

$$\delta_B = \frac{FL^۳}{۳EI} = \frac{F(۸۰۰)^۳}{۳(۲ \times ۱۰^۵)(۸۰۰۰)}$$

پیچش میله AB: $\theta_B = \dfrac{TL}{۴A_m^۲ G} \oint \dfrac{ds}{t} = \dfrac{TL \cdot P_m}{۴A_m^۲ Gt}$

$$T = Fa = ۳۰۰F \quad \text{و} \quad P_m = \pi D_m = ۴۰\pi \quad \text{و} \quad A_m = \pi D_m t = \pi \times ۴۰ \times \frac{۵}{\pi} = ۲۰۰ mm^۲$$

$$(۱) \rightarrow \delta_{۱c} = \frac{۶۴F}{۶۰۰۰} + \frac{۳۰۰F \times ۸۰۰ \times ۴۰\pi}{۴(۲۰۰)^۲(۰/۸ \times ۱۰^۵)(\frac{۵}{\pi})} \times ۳۰۰ = \frac{۶۴F}{۶۰۰۰} + \frac{۹\pi^۲ F}{۲۰۰}$$

$$(۲) \rightarrow \delta_{۲c} = \frac{F \times ۸۰۰}{(۲ \times ۱۰^۵)(۴/۶)}$$

$$\delta_{۱c} + \delta_{۲c} = ۵\,mm \Rightarrow F = ۱۱N$$

$$P = F + ۵۰۰ = ۵۱۱N$$

۱۲-۳۱. دمای یک کوره توسط سیمی از فولاد ضدزنگ که در داخل کوره قرار دارد، اندازه‌گیری می‌شود. سیم به انتهای آزاد یک تیر طره‌ای که در خارج کوره قرار دارد، بسته می‌شود. کرنشهای اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ یک کرنش‌سنج که به سطح تحتانی تیر طره‌ای چسبانده شده است، نمایندهٔ دمای داخل کوره می‌باشد. با فرض اینکه تمام طول سیم طبق درجهٔ حرارت کوره گرم شود، چه تغییری در درجهٔ حرارت کوره ایجاد می‌شود اگر کرنش سنج تغییر در کرنش را مساوی $۱۰^{-۶} \times ۱۰۰-$ میلی‌متر بر میلی‌متر ثبت کند. فرض کنید که سیم کشش اولیهٔ کافی برای عملکرد مورد انتظار را داراست. مشخصات مکانیکی مصالح به شرح زیر می‌باشند:

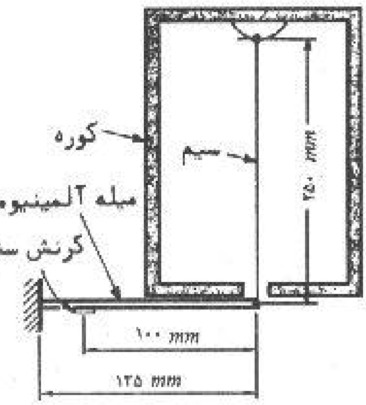
ضریب انبساط حرارتی فولاد ضد زنگ = ۱۷×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد

ضریب انبساط حرارتی آلومینیوم = ۲۲×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتیگراد

ضریب ارتجاعی فولاد ضد زنگ = ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع

ضریب ارتجاعی آلومینیوم = $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع

سطح مقطع سیم مساوی ۰/۳ میلی‌مترمربع، لنگر ماند تیر مساوی ۲۷۰ میلی‌متر به توان چهار و ارتفاع آن مساوی ۶ میلی‌متر می‌باشد.



مسأله ۱۲-۳۱

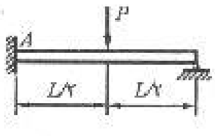
$$M_B = Fa = ۱۰۰F$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{M_B\, h/۲}{EI} = \frac{۱۰۰F \times ۳}{EI} \Rightarrow \frac{F}{EI} = \frac{\varepsilon_B}{۳۰۰}$$

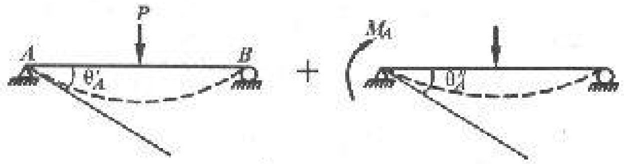
$$\delta = \frac{FL^۳}{۳EI} = \frac{\varepsilon_B}{۳۰۰} \cdot \frac{L^۳}{۳} = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}}{۳۰۰} \times \frac{(۱۲۵)^۳}{۳} = ۰/۲۱۷\,mm$$

$$\delta = L\alpha\,(\Delta T) \Rightarrow ۰/۲۱۷ = ۲۵۰(۱۷ \times ۱۰^{-۶})\,\Delta T \Rightarrow \Delta T = ۵۱/۱\ ^\circ C$$

۱۲-۳۲ تا ۱۲-۳۴. مطلوب است تعیین واکنشهای زائد تیرهای نامعین نشان داده شده در اشکال با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم‌گذاری ۱۲-۱۱) و رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای آنها. EI تمام تیرها ثابت می‌باشد.



مسئله ۱۲-۳۲



تکیه‌گاه A را به‌صورت ساده در نظر گرفته و اثر گیردار بودن آن را به شکل ممان M_A اعمال می‌کنیم.
از جدول ۳ ضمیمه:

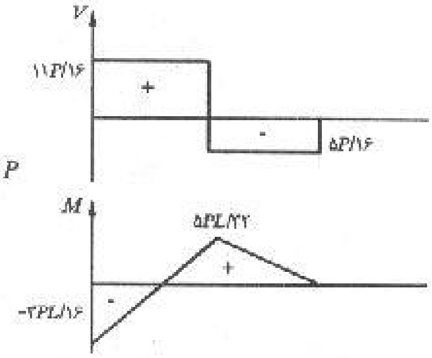
$$\theta'_A = -\frac{PL^{۲}}{۱۶EI} \quad \text{و} \quad \theta''_A = -\frac{M_A L}{۳EI}$$

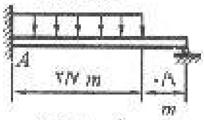
امّا با توجه به گیردار بودن تکیه‌گاه A می‌دانیم که شیب در نقطه A باید صفر باشد یعنی:

$$\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = ۰ \quad \Rightarrow M_A = -\frac{۳}{۱۶}PL$$

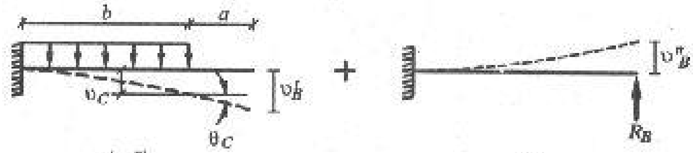
$$\sum M_B = ۰ : R_A . L - M_A - P\frac{L}{۲} = ۰ \rightarrow R_A = \frac{۱۱}{۱۶}P$$

$$\sum F_y = ۰ : R_A + R_B = P \rightarrow R_B = \frac{۵}{۱۶}P$$





مسئله ۱۲-۳۳

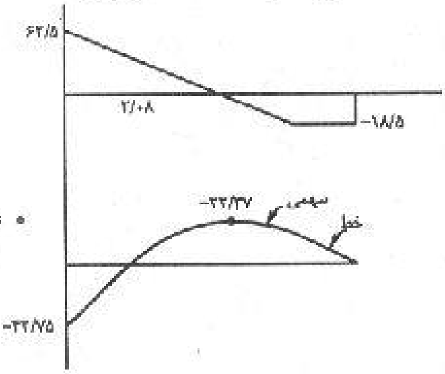


(الف) (ب)

در شکل (الف) تغییر شکل تیر تا نقطه C به صورت منحنی بوده و از نقطه C تا انتهای میله به‌صورت خطی با زاویه θ_c می‌باشد.

$$\theta_c = \frac{-qb^{۳}}{۶EI} = -\frac{۳۰(۲/۷)^{۳}}{۶EI} = -\frac{۹۸/۴}{EI}$$

$$v_c = \frac{qb^{۴}}{۸EI} = -\frac{۳۰(۲/۷)^{۴}}{۸EI} = -\frac{۱۹۹/۳}{EI}$$



$$v'_B = v_c + a\theta_c \xrightarrow{a\,=\,۰/۹} v'_B = -\frac{۲۸۷/۹}{EI}$$

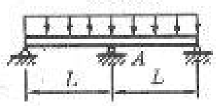
$$v''_B = \frac{R_B\,L^۳}{۳EI} = \frac{R_B\,(۳/۶)^۳}{۳EI} = \frac{۱۵/۵۵\,R_B}{EI}$$

$$v_B = v'_B + v''_B = ۰ \Rightarrow \frac{-۲۸۷/۹}{EI} + \frac{۱۵/۵۵R_B}{EI} = ۰$$

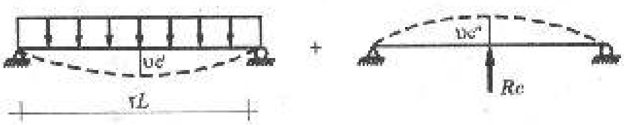
$$\rightarrow R_B = ۱۸/۵kN$$

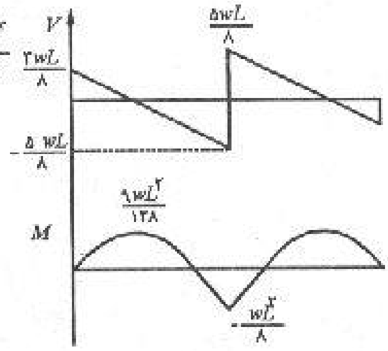
$$\sum F_y = ۰ : R_A = q.b - R_B = ۶۲/۵kN$$

$$\sum M_B = ۰ \quad : \quad M_A + R_A\,.\,L - qb\left(\frac{b}{۲} + a\right) = ۰ \rightarrow M_A = -۴۲/۷۵kN.m$$



مسأله ۱۲-۳۴





$$v'_c = -\frac{۵w\,(۲L)^۴}{۳۸۴EI} = -\frac{۵wL^۴}{۲۴EI} \qquad v''_c = \frac{R_c\,(۲L)^۳}{۴۸EI} = \frac{R_c\,L^۳}{۶EI}$$

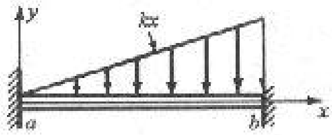
$$v_c = v'_c + v''_c = ۰ \rightarrow R_c = \frac{۵wL}{۴}$$

$$\sum M_A = ۰ : R_B \times ۲L + R_c \times L = w(۲L)\,.\,L$$

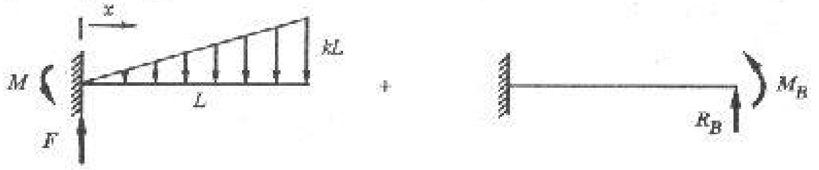
$$\rightarrow R_B = \frac{۳wL}{۸}$$

$$\sum F_y = ۰ : \quad R_A = \frac{۳wL}{۸}$$

۱۲-۳۵. با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم‌گذاری ۱۲-۱۱)، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید. لنگر و واکنش قائم نقطهٔ b را به عنوان واکنشهای اضافی در نظر بگیرید. برای تعیین تغییر مکان و دوران انتهای آزاد سازهٔ اولیه (تیر طره‌ای ab) از هر روشی می‌توانید استفاده نمایید.



مسأله ۱۲-۳۵



$$F = \frac{۱}{۲} kL.L = \frac{۱}{۲} kL^۲$$

$$\sum M_A = ۰ : \left(\frac{۱}{۲} kL^۲\right)\left(\frac{۳}{۲} L\right) - M = ۰ \rightarrow M = \frac{۱}{۳} kL^۳$$

$$M_x = -M + F.x - \frac{۱}{۲} kx.x\left(\frac{x}{۳}\right) \Rightarrow M_x = -\frac{۱}{۳} kL^۳ + \frac{۱}{۲} kL^۲.x - \frac{۱}{۶} kx^۳$$

$$EI \frac{d^۲v}{dx^۲} = -\frac{۱}{۳} kL^۳ + \frac{۱}{۲} kL^۲x - \frac{۱}{۶} kx^۳$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{۱}{۳} kL^۳x + \frac{۱}{۴} kL^۲x^۲ - \frac{۱}{۲۴} kx^۴ + C_۱ \qquad (۱)$$

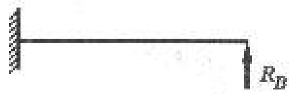
$$EIv = -\frac{۱}{۶} kL^۳x^۲ + \frac{۱}{۱۲} kL^۲x^۳ - \frac{۱}{۱۲۰} kx^۵ + c_۱x + c_۲ \qquad (۲)$$

$$v(۰) = ۰ \rightarrow c_۲ = ۰ \qquad v'(۰) = ۰ \rightarrow c_۱ = ۰$$

$$(۱) \rightarrow \theta(L) = \frac{۱}{EI}\left[-\frac{۱}{۳} kL^۴ + \frac{۱}{۴} kL^۴ - \frac{۱}{۲۴} kL^۴\right] = -\frac{kL^۴}{۸EI}$$

$$(۲) \rightarrow v(L) = \frac{۱}{EI}\left[-\frac{۱}{۶} kL^۵ + \frac{۱}{۱۲} kL^۵ - \frac{۱}{۱۲۰} kL^۵\right] = -\frac{۱۱kL^۵}{۱۲۰EI}$$

$v(L)_۱ = \frac{R_B L^۳}{۳EI}$: خیز انتها $\quad \theta(L)_۱ = \frac{R_B L^۲}{۲EI}$: شیب انتها

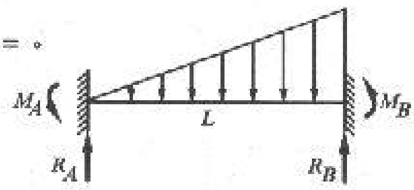


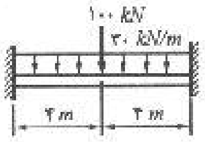
$v(L)_۲ = \frac{M_B L^۲}{۲EI}$: خیز انتها $\quad \theta(L)_۲ = \frac{M_B L}{EI}$: شیب انتها

$$\left.\begin{array}{l} v(L)_۱ + v(L)_۲ + v(L) = ۰ \rightarrow \frac{R_B L}{۳} + \frac{M_B}{۲} - \frac{۱۱}{۱۲۰} kL^۳ = ۰ \\ \theta(L)_۱ + \theta(L)_۲ + \theta(L) = ۰ \rightarrow \frac{R_B L}{۲} + M_B - \frac{۱}{۸} kL^۳ = ۰ \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} M_B = -\frac{kL^۳}{۲۰} \\ R_B = \frac{۷}{۲۰} kL^۲ \end{array}$$

$$\sum M_A = ۰ : R_B L + M_B - M_A - \left(\frac{۱}{۲} kL^۲\right)\left(\frac{۲}{۳} L\right) = ۰$$

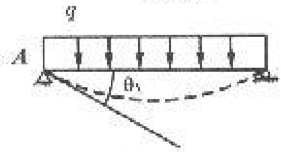
$$\rightarrow M_A = -\frac{kL^۳}{۳۰}$$



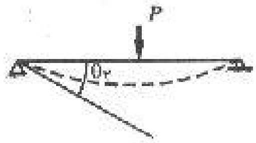


مسئله ۱۲-۳۶

۱۲-۳۶. با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم‌گذاری ۱۲-۱۱)، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید. برای تعیین تغییر شکلها از جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید.

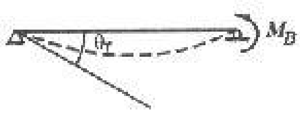


$$\theta_1 = -\frac{qL^3}{24EI} = -\frac{30 \times 8^3}{24EI} = -\frac{640}{EI}$$



$$\theta_2 = -\frac{PL^2}{16EI} = -\frac{100 \times 8^2}{16EI} = -\frac{400}{EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{M_A L}{6EI} = -\frac{M_A \times 8}{6EI} = -\frac{4M_A}{3EI}$$



$$\theta_4 = -\frac{M_B L}{6EI} = -\frac{4M_B}{3EI}$$

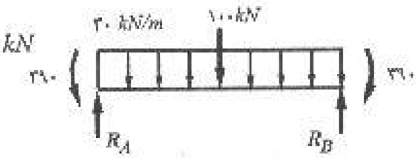
امّا می‌دانیم که شیب نقطه A باید صفر باشد:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

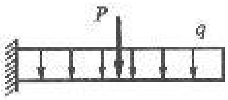
$$\left.\begin{aligned} -\frac{640}{EI} - \frac{400}{EI} - \frac{4M_A}{3EI} - \frac{4M_B}{3EI} = 0 \quad (1) \\ M_A = M_B : \text{به علت تقارن} \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_A = M_B = -390\ kN.m$$

$$\sum M_B = 0 : R_A \times 8 - (30 \times 8) \times 4 - 100 \times 4 - 390 + 390 = 0 \Rightarrow R_A = 170\ kN$$

$$\sum F_y = : R_A + R_B - qL - 100 = 0 \rightarrow R_B = 170\ kN$$



راه‌حل دوّم:

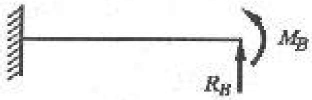


با استفاده از جدول ۳ ضمیمه:

$$v_{1B} = \frac{qL^4}{8EI} \qquad v_{2B} = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad a = \frac{L}{2} \Rightarrow v_{1B} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$\theta_{1B} = \frac{qL^3}{6EI} \qquad \theta_{2B} = \frac{Pa^2}{2EI} \qquad a = \frac{L}{2} \Rightarrow \theta_{1B} = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$v'_B = \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{M_B L^2}{2EI}$$



$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_B L}{EI}$$

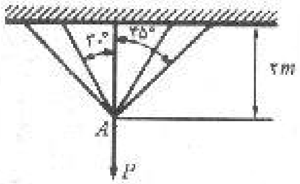
$$v_{1B} + v_{2B} = v'_B$$

$$\Rightarrow M_B = -390\,kN \quad \text{و} \quad R_B = 170\,kN$$

$$\theta_{1B} + \theta_{2B} = \theta'_B$$

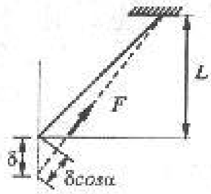
بعلت تقارن $M_A = -390\,kN$

۱۲-۳۷. پنج میلهٔ فولادی هر یک به سطح مقطع ۵۰۰ میلی‌مترمربع به صورت متقارن نشان داده شده در شکل، سوار شده‌اند. فرض کنید که رفتار فولاد به صورت ارتجاعی - خمیری کامل با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش جاری شدن ۲۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد. مطلوب است رسم ترسیمهٔ نیرو - تغییر مکان نقطهٔ A در اثر نیروی به طرف پایین P. میله‌ها در ابتدا عاری از هر گونه تنشی می‌باشند.



مسئله ۱۲-۳۷

$$\delta \cos\alpha = \frac{F\left(\frac{L}{\cos\alpha}\right)}{AE} \rightarrow F = \frac{AE}{L}\,\delta \cos^2\alpha$$



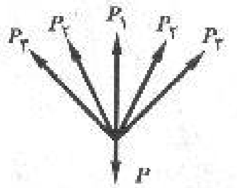
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E}{L}\,\delta \cos^2\alpha$$

تسلیم میله اوّل : $\sigma_1 = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L}\delta_1 = \sigma_y \rightarrow \frac{2 \times 10^5}{2000}\delta_1 = 250 \rightarrow \delta_1 = 2/5\,mm$

الف) حالت الاستیک:

$$0 \le \delta \le 2/5\,mm$$

$$P_1 + 2P_2 \cos 30 + 2P_3 \cos 45 = P$$



$$\left(\frac{EA}{L} + 2\frac{EA}{L}\cos^2 30 + 2\frac{EA}{L}\cos^2 45\right)\delta = P$$

تسلیم میله دوّم : $\sigma_2 = \sigma_y \rightarrow \frac{E}{L}\delta_2 \cos^2 30 = \sigma_y \rightarrow \frac{2 \times 10^5}{2000} \times \delta_2 \times \frac{3}{4} = 250 \rightarrow \delta_2 = \frac{10}{3}mm$

ب) پس از تسلیم میله اوّل:

$$2/5 \le \delta \le \frac{10}{3}mm \qquad p_1 = \sigma_y A$$

$$\sigma_y.A + \left(۲\frac{EA}{L}\cos^۲ ۳۰ + ۲\frac{EA}{L}\cos^۲ ۴۵\right)\delta = P$$

تسلیم میله سوّم: $\sigma_۲ = \sigma_y \rightarrow \frac{E}{L}\delta_۲ \cos^۲ ۴۵ = \sigma_y \rightarrow \frac{۲\times ۱۰^۵}{۲۰۰۰}\delta_۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲۵۰ \rightarrow \delta_۲ = ۵mm$

ج) پس از تسلیم میله دوّم:

$$\frac{۱۰}{۳} \le \delta \le ۵mm \quad P_۱ = P_۲ = \sigma_y A$$

$$\sigma_y A + ۲\sigma_y A\cos ۳۰ + ۲\frac{EA}{L}\cos^۲(۴۵)\delta = P$$

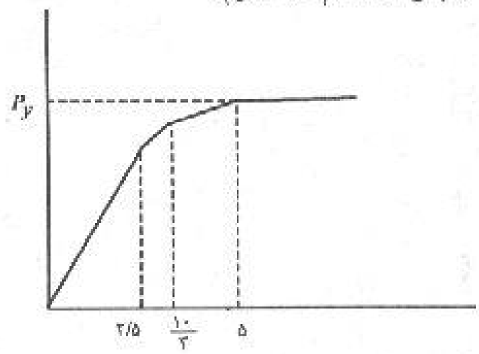
د) پس از تسلیم میله سوّم:

$$P_۱ = P_۲ = P_۳ = \sigma_y A$$

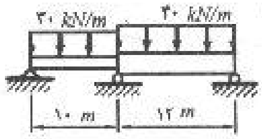
$$\sigma_y.A(۱ + ۲\cos ۳۰ + ۲\cos ۴۵) = P = P_y$$

$$\rightarrow P_y = ۵۱۸۲۸۳N$$

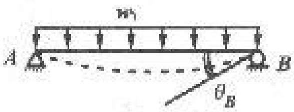
$$P_y = ۵۱۸/۲۸kN$$



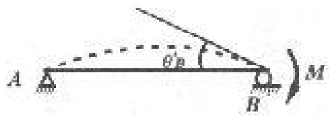
۱۲-۳۸. با استفاده از روش تغییر مکان، لنگر تکیه‌گاه میانی تیر دو دهانهٔ نشان داده شده در شکل را به دست آورید و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. لنگر ماند (ممان اینرسی) دهانهٔ راست دو برابر دهانهٔ چپ است.



مسئله ۱۲-۳۸

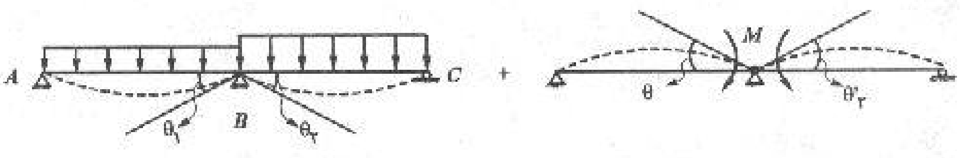


$$\theta_B = \frac{w_۱ L_۱^۳}{۲۴EI_۱}$$



$$\theta'_B = \frac{ML_۱}{۳EI_۱}$$

مسأله را می‌توان به دو شکل زیر تجزیه نمود:



$$\theta = \theta_۱ + \theta_۲ = \frac{w_۱ L_۱^۳}{۲۴EI_۱} + \frac{w_۲ L_۲^۳}{۲۴EI_۲} \qquad \theta' = \theta'_۱ + \theta'_۲ = \frac{ML_۱}{۳EI_۱} + \frac{ML_۲}{۳EI_۲}$$

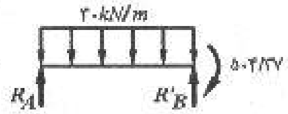
با توجه به اینکه $I_۲ = ۲I_۱$ در نتیجه θ و θ' بصورت زیر در می‌آیند.

$$\theta = \frac{۱}{۲۴EI_۱}\left(w_۱ L_۱^۳ + w_۲\frac{L_۲^۳}{۲}\right) \qquad \theta' = \frac{M}{۳EI_۱}\left(L_۱ + \frac{L_۲}{۲}\right)$$

$\theta = \theta' \longrightarrow M = ۵۰۴/۳۷\,kN.m$

$\sum M_B = ۰ \;:\; (۳۰ \times ۱۰) \times ۵ - R_A \times ۱۰ - ۵۰۴/۳۷ = ۰ \Rightarrow R_A = ۹۹/۵۶\,kN$

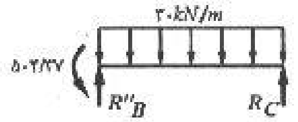
$\sum F_y = ۰ :\; R_A + R'_B - ۳۰ \times ۱۰ = ۰ \Rightarrow R'_B = ۲۰۰/۴۴\,kN$

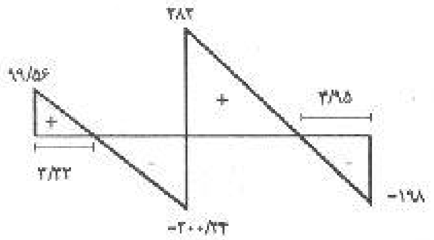


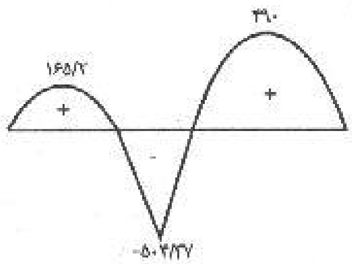
$\sum M_B = ۰ \;:\; R_c \times ۱۲ - (۴۰ \times ۱۲) \times ۶ + ۵۰۴/۳۷ = ۰ \Rightarrow R_c = ۱۹۸\,kN$

$\sum F_y = ۰ :\; R''_B + ۱۹۸ = ۴۰ \times ۱۲ \Rightarrow R_B'' = ۲۸۲\,kN$

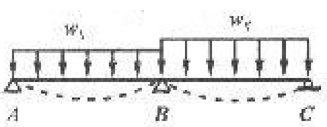
$R_B = R'_B + R''_B = ۴۸۲/۴۴\,kN$

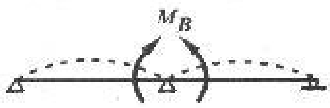






۱۲–۳۹. مسأله ۱۲–۳۸ را با فرض گیردار بودن تکیه‌گاه چپ مجدداً حل نمایید.





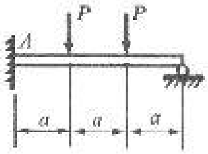
$$\theta_A = ۰ \Rightarrow -\frac{w_1 L_1^3}{۲۴EI_1} + \frac{M_B L_1}{۳EI_1} - \frac{M_A L_1}{۳EI_1} = ۰$$

$$\theta_B = ۰ \Rightarrow -\frac{w_1 L_1^3}{۲۴EI_1} - \frac{w_2 L_2^3}{۲۴EI_2} + \frac{M_B L_1}{۳EI_1} + \frac{M_B L_2}{۳EI_2} - \frac{M_A L_1}{۳EI_1} = ۰$$

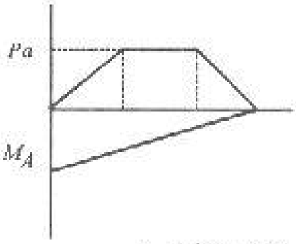
با توجه به اینکه $I_2 = ۲I_1$ پس از ساده کردن:

$$\begin{cases} M_A - M_B = -۳۷۵ \\ -M_A + ۱/۶\,M_B = ۸۰۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} M_A = ۳۴۵\,kN.m \\ M_B = ۷۲۰\,kN.m \end{array}$$

۱۲–۴۰ و ۱۲–۴۱. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای زائد تیرهای نامعین زیر را به دست آورده و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم کنید. در هر دو تیر EI ثابت می‌باشد. (راهنمایی: در مسأله ۱۲–۴۱ واکنش سمت راست را به عنوان اضافی در نظر بگیرید).

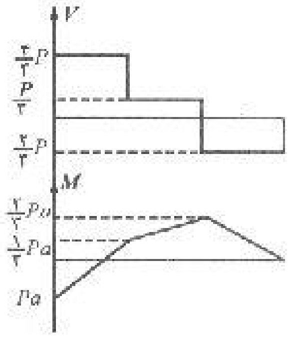


مسئله ۱۲-۴۰



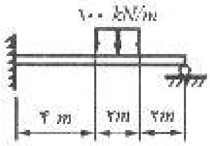
$$t_{BA}=۰\rightarrow\frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۳a+a}{۲}\,.\,Pa\right)\left(\frac{۳a}{۲}\right)-\frac{۱}{۲}M_A\,(۳a)\,(۲a)\right]=۰\rightarrow M_A=Pa$$

چون جهت M_A را از ابتدا منفی در نظر گرفته بودیم جواب $Pa+$ به‌دست آمده است.

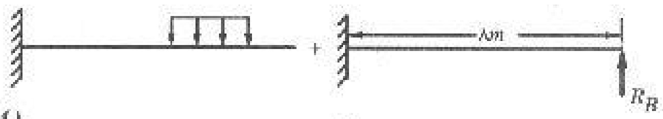


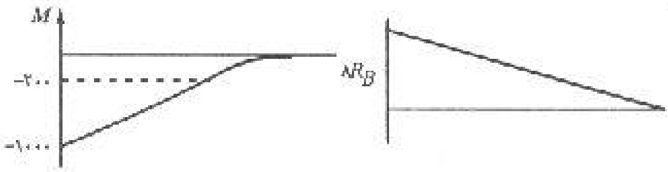
$$\sum M_B=۰\;:\;R_A(۳a)-P(۲a)-Pa-M_A=۰\rightarrow R_A=\frac{۴}{۳}P$$

$$\sum F_y=۰\;:\;R_B+\frac{۴}{۳}P-۲P=۰\rightarrow R_B=\frac{۲}{۳}P$$



مسئله ۱۲-۴۱

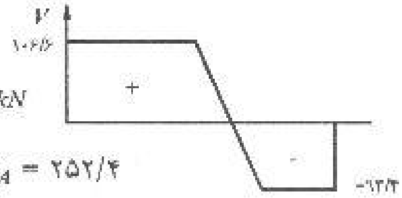




$$t_{BA}=۰\rightarrow\quad\frac{۱}{EI}\left[-\left(\frac{۱}{۲}\times۸۰۰\times۴\right)\left(۴+\frac{۲}{۳}\times۴\right)-(۲۰۰\times۴)(۶)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{۱}{۳}\times۲۰۰\times۲\right)\left(۲+\frac{۳\times۲}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times۸R_B\times۸\right)\left(\frac{۲}{۳}\times۸\right)\right]=۰$$

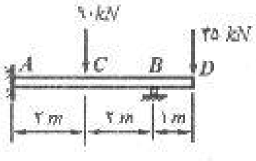
$$\rightarrow R_B=۹۳/۴\,kN$$



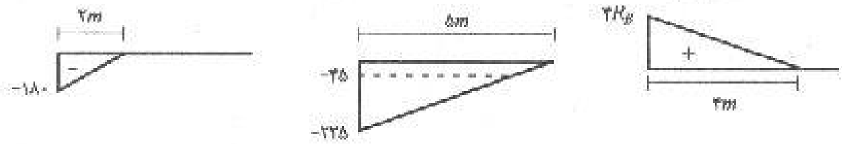
$$\sum F_y=۰:R_A=۱۰۰\times۲-۹۳/۴\Rightarrow R_A=۱۰۶/۶\,kN$$

$$\sum M_A=۰:-M_A+۲۰۰\times۵-۹۳/۴\times۸=۰\rightarrow M_A=۲۵۲/۴$$

۱۲-۴۲. (الف) با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنش اضافی تیر نامعین نشان داده شده در شکل را به دست آورید و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید. (ب) اگر تنش مجاز خمشی چوب ۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش برشی مجاز مساوی ۱ نیوتن بر میلی‌مترمربع و پهنای تیر مساوی ۲۰۰ میلی‌متر باشد، ارتفاع تیر را در صورتی که بخواهیم آن را از جنس چوب طراحی کنیم، به دست آورید. (پ) مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل تیر بین دو تکیه‌گاه و در ناحیهٔ بالکنی. ضریب ارتجاعی چوب را مساوی $0/1 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسألهٔ ۱۲-۴۲

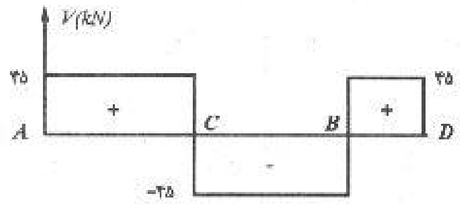


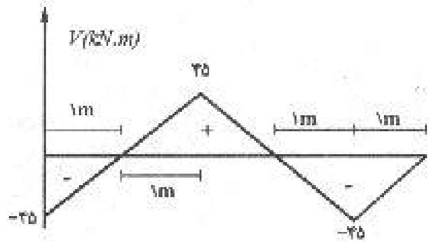
$$t_{BA} = 0 : \frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{1}{2}\times 180 \times 2\right)\left(2 + \frac{2}{3}\times 2\right) - (4\times 45)(2) - \left(\frac{1}{2}\times 180 \times 4\right)\left(\frac{2}{3}\times 4\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\times 4R_B \times 4\right)\left(\frac{2}{3}\times 4\right)\right] = 0 \qquad \Rightarrow R_B = 90\, kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 45 kN \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + 90\times 4 - 90 \times 2 - 45 \times 5 = 0 \Rightarrow M_A = 45 kN.m$$





$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow \frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} \Rightarrow \frac{1}{6}bh^2 = \frac{M}{\sigma} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{6\times 45 \times 10^6}{200 \times 8}} = 410/8 mm$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2}\times \frac{45000}{200 \times 410/8} = 0/82\, N/mm^2 < \tau_{all}$$

پس از یک تیر با مقطع $200\, mm \times 411\, mm$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به رابطه $\theta = \frac{A}{EI}$ و نمودار لنگر خمشی مشخص است که شیب صفر در وسط دهانه رخ می‌دهد. پس محل خیز ماکزیمم، وسط دهانه (نقطه C) می‌باشد.

$$v_{max} = t_{cA} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\times 45 \times 1\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\times 45\times 1\right)\left(1 + \frac{2}{3}\right)\right] = -\frac{30}{EI}$$

$E = ۰/۱ \times ۱۰^{۵} N/mm^{۲} = ۰/۱ \times ۱۰^{۸} kN/m^{۲} \quad I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۴۱۱)^{۳} = ۱/۱۵۷ \times ۱۰^{-۳}\ m^{۴}$

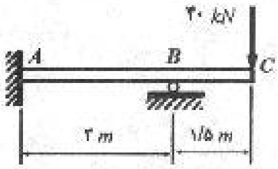
$$v_{max} = \frac{-۳۰}{EI} = ۲/۵۹ \times ۱۰^{-۳}\ m = ۲/۵۹\ mm$$

$$v_D = t_{DB} = \left[-\left(\frac{۱}{۲} \times ۴۵ \times ۱\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\right] = \frac{-۱۵}{EI} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۳} m = ۱/۳\ mm$$

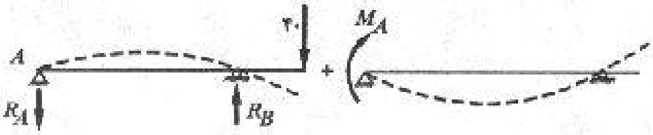
۱۲-۴۳. (الف) با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنش اضافی تیر نامعین نشان داده شده در شکل را به دست آورید و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید. (ب) اگر تنش خمشی مجاز مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش برشی مجاز مساوی ۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، یک تیمرخ IPE مناسب برای آن انتخاب نمایید. (پ) حداکثر تغییر مکان تیر را بین دو تکیه‌گاه و در ناحیهٔ بالکنی به دست آورید.

ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید.

الف)

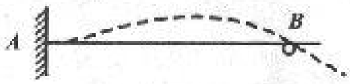


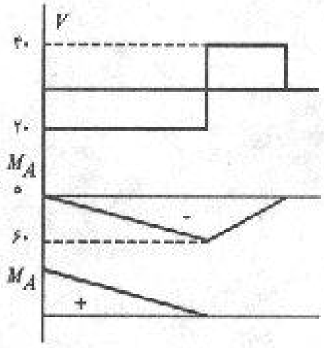
مسئله ۱۲-۴۳



$$\sum M_A = ۰ : ۴۰ \times ۴/۵ - R_B \times ۳ = ۰ \rightarrow R_B = ۶۰\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : -R_A + ۶۰ = ۴۰ \rightarrow R_A = ۲۰\ kN$$





$$t_{BA} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{EI}\left[-\left(\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۳\right)(۱) + \left(\frac{۱}{۲} M_A \times ۳\right)(۲)\right] = ۰$$

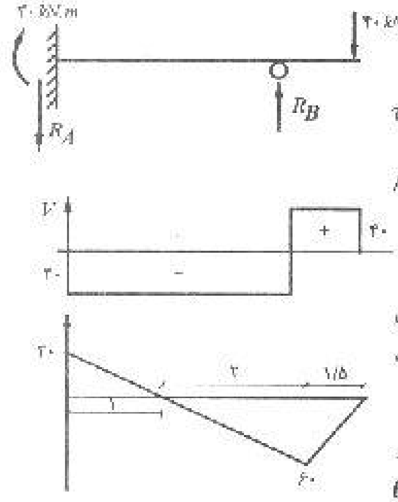
$$\rightarrow M_A = ۳۰\ kN.m$$

$$\sum M_B = ۰ : ۴۰ \times ۱/۵ + ۳۰ - R_A \times ۳ = ۰ \rightarrow R_A = ۳۰\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : R_A + ۴۰ = R_B \rightarrow R_B = ۷۰\ kN$$

$$\sigma_{all} = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{۶۰ \times ۱۰^{۶} (N.mm)}{۱۲۵} = ۴۸ \times ۱۰^{۴} mm$$

$$S = ۴۸۰\ cm^{۳}$$



با توجه به جدول ۱ ضمیمه IPE ۳۰۰ مناسب می‌باشد.

ب)

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$۸۰ = \frac{(۴۰۰۰۰)(۳۱۴ \times ۱۰^۳)}{(۸۳۶۰ \times ۱۰^۴)(۷/۱)} = ۲۱/۲\,MPa < \tau_{all}$$

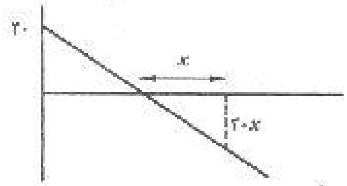
پس نیمرخ IPE ۳۰۰ برای تنش برشی هم جوابگو است.

پ) ابتدا باید محل خیز ماکزیمم بین دو تکیه‌گاه مشخص شود. برای این منظور از تئوری اوّل ممان سطح استفاده می‌کنیم.

در محل خیز ماکزیمم مماس افقی است و می‌دانیم که در محل تکیه‌گاه گیردار هم مماس افقی می‌باشد یعنی: $\theta_{MA} = ۰$

$$\theta_{MA} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times ۱ - \frac{۱}{۲} \times x \times (۳۰x)\right] = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$$

$x = ۱m$ قابل قبول می‌باشد یعنی محل خیز ماکزیمم در ۲ متری تکیه‌گاه گیردار واقع است.



حال از تئوری دوم ممان سطح مقدار خیز ماکزیمم به دست می‌آید:

$$v_{max} = -\frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times ۱\right)\left(\frac{۱}{۳}\right) - \left(\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۳۰\right)(۱ + ۱)\right] = \frac{۲۵}{EI}$$

$$E = ۲ \times ۱۰^۵\,N/mm^۲ = ۲ \times ۱۰^۸\,kN/m^۲ \quad \text{و} \quad I = ۰/۸۳۶ \times ۱۰^{-۴}\,m^۴$$

$$v_{max} = ۱/۴۹ \times ۱۰^{-۳}\,m = ۱/۴۹\,mm$$

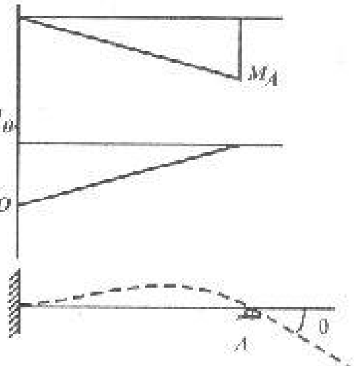
$$v_c = t_{cB} = \frac{۱}{EI}\left[-\left(\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۱/۵\right)\left(\frac{۲}{۳} \times ۱/۵\right)\right] = \frac{-۴۵}{EI} = -۲/۷ \times ۱۰^{-۳}\,m = -۲/۷\,mm$$

۱۲-۴۴. برای تیر نشان داده شده در شکل مطلوب است (الف) نسبت لنگر انتهای گیردار به لنگر M_A (ب) دوران انتهای A، EI تیر ثابت می‌باشد.

مسئله ۱۲-۴۴

+

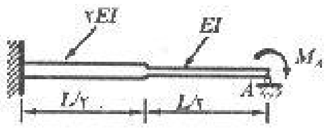

$$t_{AO} = ۰ : \frac{۱}{EI}\left[-\frac{۱}{۲}M_A L \,.\, \frac{L}{۳} - \frac{۱}{۲}M_o L \,.\, \frac{۲}{۳}L\right] = ۰ \quad \rightarrow \frac{M_o}{M_A} = -\frac{۱}{۲}$$



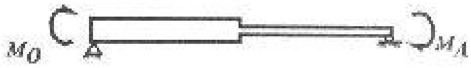
$$\theta_A = \theta_{AO} = \frac{۱}{EI}\left[-\frac{۱}{۲}M_A L - \frac{۱}{۲}M_o L\right] = \frac{-L}{۲EI}(M_A + M_o)$$

$$= \frac{-L}{۲EI}\left(M_A - \frac{M_A}{۲}\right) = \frac{-M_A L}{۴EI}$$

۴۵-۱۲. برای تیر نشان داده شده در شکل مطلوب است (الف) نسبت لنگر انتهای گیردار به لنگر M_A (ب) دوران انتهای A.



مسئله ۴۵-۱۲



$$A_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{L}{۲} \times \frac{M_A}{۲EI} = \frac{M_A L}{۸EI}$$

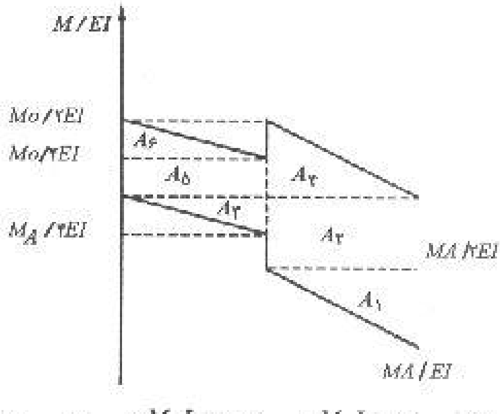
$$A_۲ = \frac{L}{۲} \times \frac{M_A}{۲EI} = \frac{M_A L}{۴EI}$$

$$A_۳ = \frac{۱}{۲} \times \frac{L}{۲} \times \frac{M_A}{۴EI} = \frac{M_A L}{۱۶EI}$$

$$A_۴ = \frac{۱}{۲} \times \frac{L}{۲} \times \frac{M_o}{۲EI} = \frac{M_o L}{۸EI}$$

$$A_۵ = \frac{L}{۲} \times \frac{M_o}{۴EI} = \frac{M_o L}{۸EI}$$

$$A_۶ = \frac{۱}{۲} \times \frac{L}{۲} \times \frac{M_o}{۴EI} = \frac{M_o L}{۱۶EI}$$



$$t_{Ao} = ۰ \Rightarrow \sum A\,\bar{x} = ۰ \Rightarrow$$

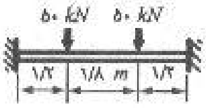
$$-\left(\frac{M_A L}{۸EI}\right)\left(\frac{L}{۶}\right) - \left(\frac{M_A L}{۴EI}\right)\left(\frac{L}{۴}\right) - \left(\frac{M_A L}{۱۶EI}\right)\left(\frac{L}{۲} + \frac{L}{۶}\right) + \left(\frac{M_o L}{۸EI}\right)\left(\frac{L}{۳}\right) + \left(\frac{M_o L}{۸EI}\right)\left(\frac{L}{۲} + \frac{L}{۴}\right)$$

$$+ \left(\frac{M_o L}{۱۶EI}\right)\left(\frac{L}{۲} + \frac{L}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow \frac{M_o}{M_A} = \frac{۲}{۳}$$

$$\theta_{Ao} = \sum A = -\frac{M_A L}{۸EI} - \frac{M_A L}{۴EI} - \frac{M_A L}{۱۶EI} + \frac{M_o L}{۸EI} + \frac{M_o L}{۸EI} + \frac{M_o L}{۱۶EI} = ۰$$

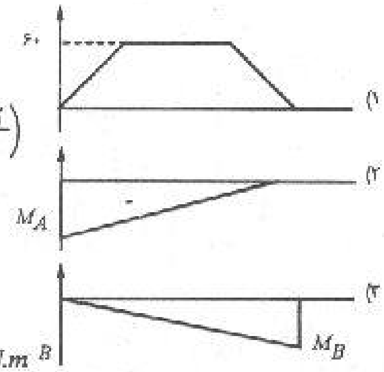
$$= -\frac{۷M_A L}{۱۶EI} + \frac{۵M_o L}{۱۶EI} = -\frac{۷M_A L}{۱۶EI} + \frac{۱۰M_A L}{۴۸EI} = -\frac{۱۱M_A L}{۴۸EI}$$

۱۲-۴۶ و ۱۲-۴۷. برای تیرهای نشان داده شده در شکل با استفاده از روش مساحت لنگر مطلوب است (الف) تعیین مقادیر لنگرهای گیرداری و رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی (ب) تعیین حداکثر تغییر مکان بر حسب بارهای وارده و EI از وزن تیرها صرف نظر نمایید.



مسئله ۱۲-۴۶

$t_{BA} = ۰$

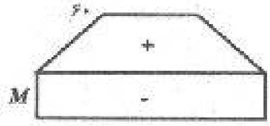


$$\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱/۸ + ۴/۲)(۶۰) \times ۲/۱ - \left(\frac{۱}{۲}M_B \times ۴/۲\right)\left(\frac{۴/۲}{۳}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{۱}{۲} \times M_A \times ۴/۲\right)\left(\frac{۲}{۳} \times ۴/۲\right)\right] = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \to ۵/۸۸\, M_A + ۲/۹۴ M_B = ۳۷۸ \\ \text{به علت تقارن} \to M_A = M_B \end{array}\right\} \to M_A = ۴۲/۸۶\, kN.m$$

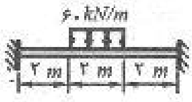
البته بعلت مساوی بودن مقادیر M_A و M_B می‌توانستیم یک لنگر مجهول در طول تیر به‌صورت زیر در نظر بگیریم:



$$t_{BA} = ۰ : \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱/۸ + ۴/۲)(۶۰) \times ۲/۱ - (M \times ۴/۲)(۲/۱)\right] = ۰ \Rightarrow M = ۴۲/۸۶\, kN/m$$

$$v_{max} = t_{MA} = \frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۱/۲\right)(۰/۹ + ۰/۴) + (۶۰ \times ۰/۹)\left(\frac{۰/۹}{۲}\right)\right.$$

$$\left. - (۴۲/۸۶ \times ۲/۱)\left(\frac{۲/۱}{۲}\right)\right] \qquad \Rightarrow v_{max} = \frac{-۲۳/۴}{EI}$$

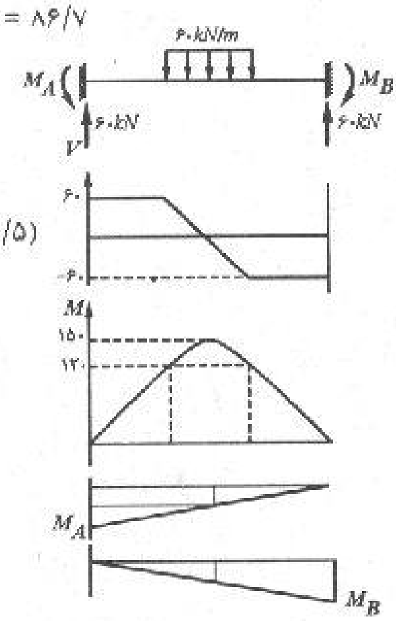


مسئله ۱۲-۴۷

$\theta_{AB} = ۰$

$$\frac{۱}{EI}\left[۲\times\frac{۱}{۲}\times۱۲۰ + ۲\times۱۲۰ + \frac{۲}{۳}\times۳۰\times۲ + \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۲۰ - \frac{۱}{۲}\times۶\times M_A - \frac{۱}{۲}\times۶\times M_B\right] = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow ۵۲۰ - ۳M_A - ۳M_B = ۰ \\ M_A = M_B \text{ به علت تقارن} \end{array}\right\} \rightarrow M_A = M_B = \frac{۲۶۰}{۳} = ۸۶/۷$$



$v_{max} = t_{MA}$

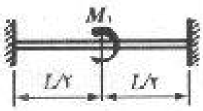
$$= \frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۲۰\right)\left(۱+\frac{۲}{۳}\right) + (۱\times۱۲۰)(۰/۵)\right.$$

$$+ \left(\frac{۲}{۳}\times۱\times۳۰\right)\left(\frac{۳\times۱}{۸}\right) - \left(\frac{۸۶/۷}{۲}\times۳\right)(۱/۵)$$

$$\left.-\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۶/۷}{۲}\times۳\right)(۲) - \left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۶/۷}{۲}\times۳\right)(۱)\right]$$

$$\Rightarrow v_{max} = -\frac{۱۲۲/۴}{EI}$$

۱۲–۴۸ تا ۱۲–۵۰. مطلوب است تعیین لنگرهای گیرداری تیرهای نشان داده شده با استفاده از روش مساحت لنگر. EI تیرها ثابت می‌باشد و از وزن آنها صرف‌نظر نمایید.



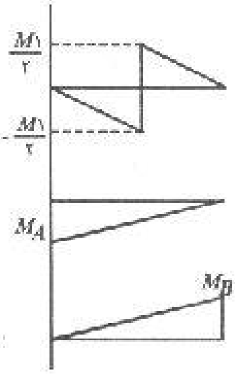
مسئله ۱۲–۴۸

$t_{BA} = ۰$

$$\frac{۱}{EI}\left[-\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{M_۱}{۲}\times\frac{L}{۲}\right)\left(\frac{L}{۲}+\frac{L}{۶}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times\frac{M_۱}{۲}\times\frac{L}{۲}\right)\left(\frac{۲}{۳}\times\frac{L}{۲}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{۱}{۲}\times M_A\times L\right)\left(\frac{۲}{۳}L\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times M_B\times L\right)\left(\frac{L}{۳}\right)\right] = ۰ \Rightarrow -M_۱ - ۸M_A + ۴M_B = ۰ \quad (۱)$$

$t_{BA} = 0$



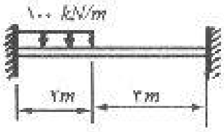
$$\frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{1}{2}\times\frac{M_1}{2}\times\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{L}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{M_1}{2}\times\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{6}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\times M_A\times L\right)\left(\frac{L}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times M_B\times L\right)\left(\frac{2}{3}L\right)\right]=0$$

$$\rightarrow M_1 - 4M_A + 8M_B = 0 \qquad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$M_A = -\frac{M_1}{4} \quad \text{و} \quad M_B = \frac{M_1}{4}$$



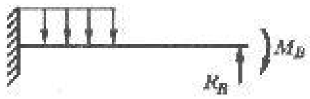
مسئله ۱۲-۴۹

$$A_1 = \frac{bh}{3} = \frac{2\times 2000}{3} = 1333/3$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{4} = \frac{3\times 2}{4} = 1/5$$

$$t_{BA} = 0 : \frac{1}{EI}\left[-(1333/3)(3+1/5)+\left(\frac{1}{2}\times 5R_B\times 5\right)\left(\frac{2}{3}\times 5\right)-(M_B\times 5)\left(\frac{5}{2}\right)\right]=0$$

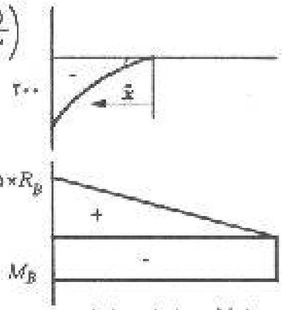
$$\Rightarrow -600 - 12/5\, M_B + 41/7\, R_B \qquad (1)$$



$$t_{AB} = 0 : \frac{1}{EI}\left[-(1333/3)(2-1/5)+\left(\frac{1}{2}\times 5R_B\times 5\right)\left(\frac{5}{3}\right)\right.$$

$$\left.-(M_B\times 5)\left(\frac{5}{2}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow -66/7 + 20/8\, R_B - 12/5 M_B = 0 \qquad (2)$$

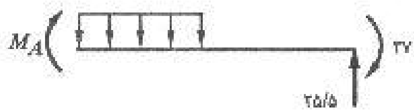


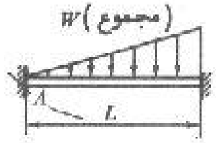
از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$R_B = 25/6 \quad \text{و} \quad M_B = 37/3$$

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad M_A + 200\times 1 + 37/3 - 25/6\times 5 = 0$$

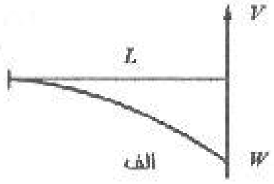
$$\Rightarrow M_A = -109/3$$

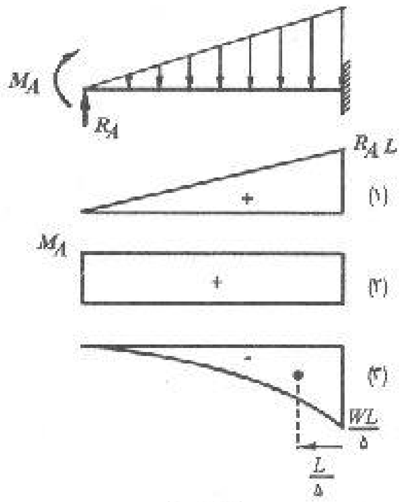




مسأله ۱۲-۵۰

نیروی R_A و ممان M_A را به‌عنوان عکس‌العملهای اضافی در نظر می‌گیریم.
منحنی نیروی برشی برای بار مثلثی اعمال شده بر تیر مطابق شکل الف است:





منحنی مذکور درجه ۲ بوده و طبق جدول ۱ ضمیمه مساحت آن $\frac{Lw}{3}$ می‌باشد،
بنابراین منحنی ممان به‌صورتی که در شکل (۳) دیده می‌شود در می‌آید.

$$\theta_{BA} = 0 \quad : \quad \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2} R_A L \,.\, L + M_A L - \frac{1}{4}\,\frac{wL}{3}\,.\, L\right] = 0$$

$$\Rightarrow M_A + \frac{1}{2} R_A L = \frac{1}{12} wL^2 \qquad (1)$$

$$t_{BA} = 0 \quad : \quad \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{R_A L^2}{2} \times \frac{2L}{3}\right) + \left(M_A L \times \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{wL^2}{12} \times \left(L - \frac{L}{5}\right)\right)\right] = 0$$

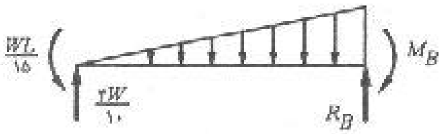
$$\Rightarrow \frac{1}{2} M_A + \frac{1}{3} R_A L = \frac{1}{15} wL \qquad (2)$$

با حل معادلات (۱) و (۲):

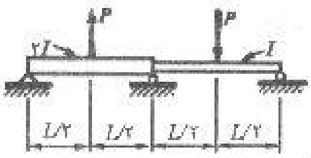
$M_A = -\frac{wL}{15}$ و $R_A = \frac{3}{10} w$

$\sum MB = 0 : M_B = \frac{wL}{10}$

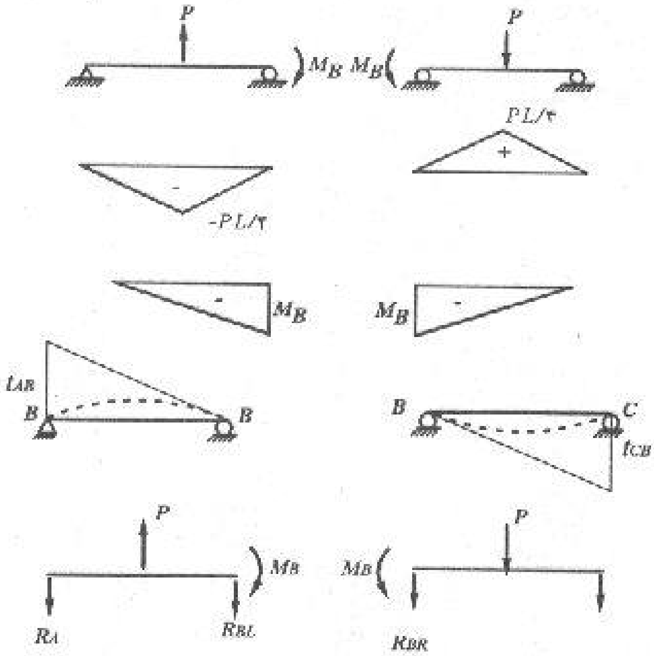
$\sum F_y = 0 : R_B = \frac{7}{10} w \uparrow$



۱۲-۵۱ و ۱۲-۵۲. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای تیرهای سراسری تامعین نشان داده شده در اشکال را به دست آورید و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم نمایید.



مسأله ۱۲-۵۱



$$\theta_{BL} = -\theta_{BR} \Rightarrow \frac{t_{AB}}{L} = -\frac{t_{CB}}{L} \Rightarrow t_{AB} = -t_{CB}$$

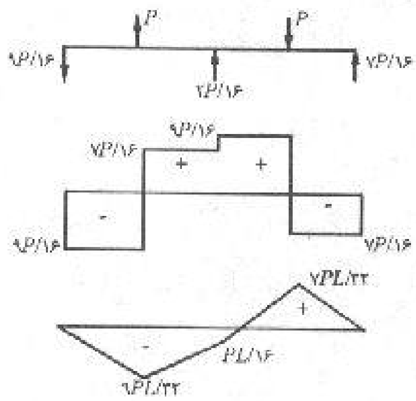
$$\frac{۱}{۲EI}\left[-\left(\frac{۱}{۲}\frac{PL}{۴}.L\right)-\left(\frac{L}{۲}\right)-\left(\frac{۱}{۲}M_B.L\right)\left(\frac{۲L}{۳}\right)\right] = -\frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲}\frac{PL}{۴}.L\right)\left(\frac{L}{۲}\right)-\left(\frac{۱}{۲}M_B.L\right)\left(\frac{۲L}{۳}\right)\right]$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{PL}{۱۶}$$

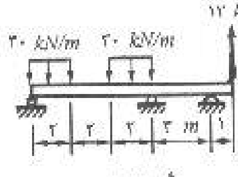
$$\sum M_A = ۰ \;)+ \;: R_A L - P\frac{L}{۲} - M_B = ۰ \rightarrow R_A = \frac{۹P}{۱۶}$$

$$\sum M_c = ۰ \;)+ \;: R_c L + M_B - P\frac{L}{۲} = ۰ \rightarrow R_c = \frac{۷P}{۱۶}$$

روی کل تیر $\sum F_y = ۰ : -R_A + R_B + R_c + P - P = ۰ \rightarrow R_B = \frac{۲P}{۱۶}$



۱۲-۵۲. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای تیرهای سراسری نامعین نشان داده شده در اشکال را به دست آورید و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم نمایید.



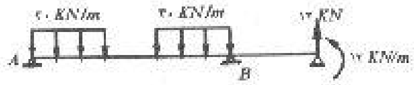
مسئله ۱۲-۵۲

$$\theta'_B = \theta''_B \Rightarrow \frac{t_{AB}}{L_{AB}} = \frac{t_{CB}}{L_{CB}} \quad (۱)$$

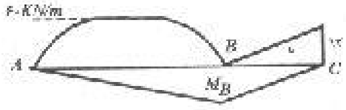
با توجه به اینکه سطح A، از یک مستطیل و دو نیم سهمی تشکیل شده:

$$t_{AB} = \frac{۱}{EI}\left[\left(۲\times\frac{۲}{۳}\times ۲\times ۶۰ + ۲\times ۶۰\right)(۳) - \left(\frac{۱}{۲}\times ۶\times M_B\right)(۴)\right]$$

$$= \frac{۱}{EI}(۸۴۰ - ۱۲M_B)$$

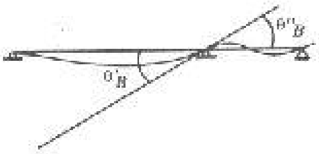


$$t_{CB} = \frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۱۲\right)(۱) - \left(\frac{۱}{۲}\times ۳\times M_B\right)(۲)\right]$$



$$= \frac{۱}{EI}(۱۸ - ۳M_B)$$

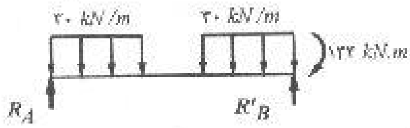
$$(۱) \rightarrow \frac{۱}{EI}\,\frac{۴۸۰ - ۱۲M_B}{۶} = \frac{۱}{EI}\,\frac{۱۸ - ۳M_B}{۳}$$



$$\rightarrow M_B = ۱۳۴\ kN.m$$

$$\sum M_A = ۰ \circlearrowright + : ۶۰\times ۱ + ۶۰\times ۵ + ۱۳۴ - R'_B\times ۶ \rightarrow R'_B = ۸۲/۳\ kN$$

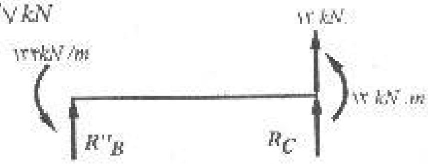
$$\sum F_y = ۰ : \quad R_A + R'_B = ۱۲۰ \rightarrow R_A = ۳۷/۷\ kN$$

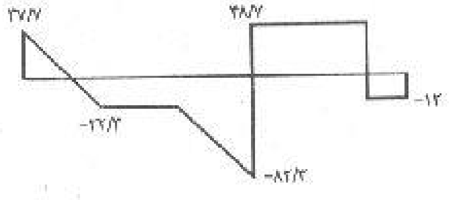


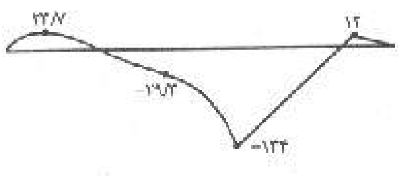
$$\sum M_A = ۰ \circlearrowright + : R''_B \times ۳ - ۱۳۴ - ۱۲ = ۰ \rightarrow R''_B = ۴۸/۷\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : \quad R_c + ۴۸/۷ + ۱۲ = ۰ \rightarrow R_c = -۶۰/۷\ kN$$

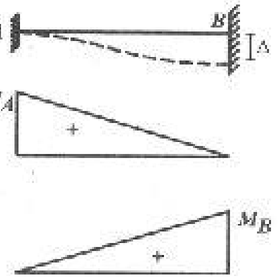
$$R_B = R'_B + R''_c \Rightarrow R_B = ۱۳۱\ kN$$







۱۲-۵۳. یک تیر دو سرگیردار با سختی خمشی EI و دهانهٔ L مفروض است. اگر یکی از دو تکیه‌گاه تیر نشستی به مقدار Δ داشته باشد (بدون هیچ‌گونه چرخشی)، لنگرهای ایجاد شده در دو تکیه‌گاه را به دست آورید.



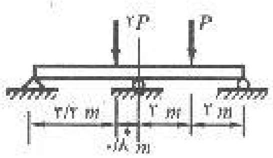
$$\theta_{BA} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}M_A L + \frac{۱}{۲}M_B L\right] = ۰ \Rightarrow M_B = -M_A \quad (۱)$$

$$t_{BA} = \Delta = \frac{۱}{EI}\left[\left(\frac{۱}{۲}M_A L\right)\left(\frac{۲}{۳}L\right) + \left(\frac{۱}{۲}M_B L\right)\left(\frac{L}{۳}\right)\right] = ۰ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \rightarrow \Delta EI = \frac{۲}{۶}M_A L^۲ - \frac{۱}{۶}M_A L^۲ \rightarrow M_A = \frac{۶EI}{L^۲}\Delta$$

$$(۱) \Rightarrow M_B = -M_A = -\frac{۶EI}{L^۲}\Delta$$

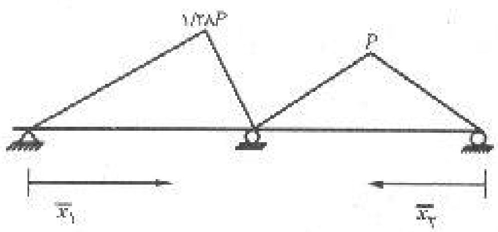
۱۲-۵۴ تا ۱۲-۵۸. با استفاده از تضییهٔ سه لنگری، لنگرهای تکیه‌گاهی تیرهای سراسری نشان داده شده در اشکال را تعیین نموده و ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را تعیین کنید:



مسأله ۱۲-۵۴

$$M_{۱max} = \frac{P_۱ ab}{L_۱} = \frac{۲P(۳/۲)(۰/۸)}{۴} = ۱/۲۸P$$

$$M_{۲max} = \frac{P_۲ ab}{L_۲} = \frac{P(۲)(۲)}{۴} = P$$



$$\bar{x}_۱ = ۴ - \frac{۴ + ۰/۸}{۳} = ۲/۴\,m$$

$$\bar{x}_۲ = ۲m$$

$$A_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱/۲۸P = ۲/۵۶P$$

$$A_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times P = ۲P$$

$$M_A L_۱ + ۲M_B(L_۱ + L_۲) + M_۲ L_۲ = -\frac{۶A_۱\bar{x}_۱}{L_۱} - \frac{۶A_۲\bar{x}_۲}{L_۲}$$

$$۰ + ۲M_B(۴ + ۴) + ۰ = -\frac{۶(۲/۵۶)(۲/۴)}{۴} - \frac{۶(۲P)(۲)}{۴} \Rightarrow M_B = -۰/۹۵P$$

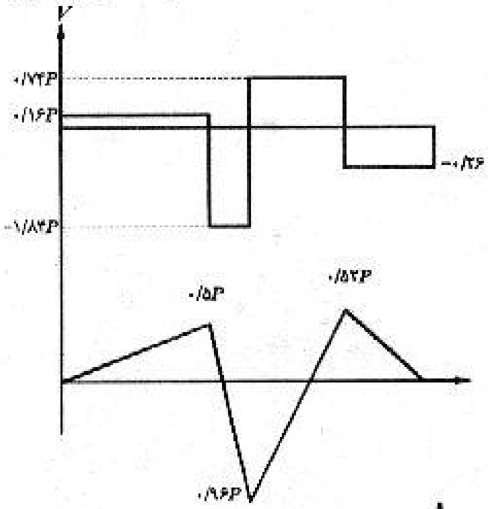
$$\sum M_A = ۰ \circlearrowright + : ۲P \times ۳/۲ + ۰/۹۵P - R'_B \times ۴ = ۰ \Rightarrow R'_B = ۱/۸۴P$$

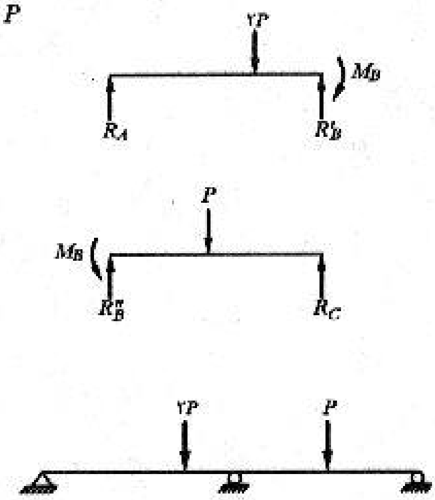
$$\sum F_y = ۰ \quad : R_A = ۲P - ۱/۸۴P \rightarrow R_A = ۰/۱۶P$$

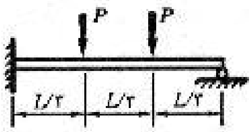
$$\sum M_c = ۰ \circlearrowright + \quad : R''_B \times ۴ - ۰/۹۵P - P \times ۲ = ۰ \rightarrow R''_B = -۰/۷۴P$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : R_c = P - ۰/۷۴P \Rightarrow R_c = ۰/۲۶P$$

$$R_B = R'_B + R''_B = ۲/۵۸P$$







مسئله ۱۲-۵۵

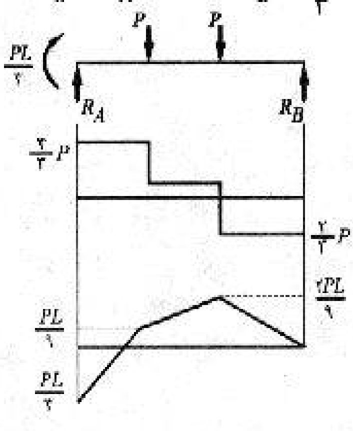
$$A = \frac{L + \frac{L}{۲}}{۲} \times \frac{PL}{۳} = \frac{۲PL^۲}{۹}$$

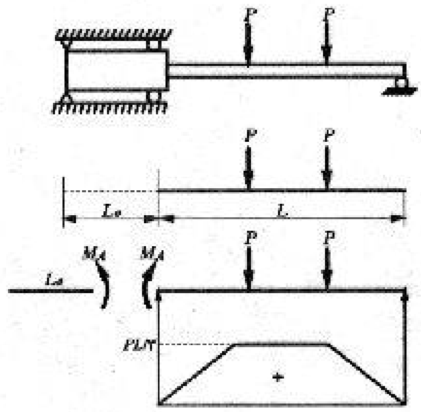
$$M_۰L_۰ + ۲M_A(L_۰ + L) + M_B L = -۶\frac{۲P\frac{L^۲}{۹} \cdot L}{L} = \frac{۲}{۳}PL^۲$$

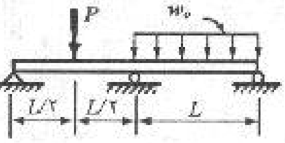
$$L_۰ \rightarrow ۰ \Rightarrow M_A = -\frac{PL}{۳}$$

$$\sum M_B = ۰ : \frac{PL}{۳} + P \times \frac{۲}{۳}L + P \times \frac{L}{۳} - R_A \times L = ۰$$

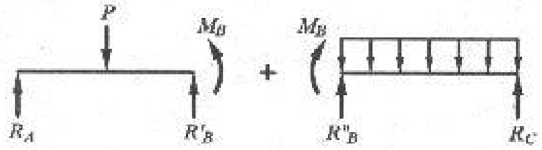
$$\sum F_y = ۰ : R_B + R_A = ۲P \rightarrow R_B = \frac{۲}{۳}P$$







مسأله ۱۲-۵۶

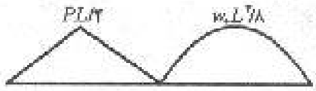


$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_3 = -\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_1} - \frac{6A_2\bar{x}_2}{L_2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\frac{PL}{4}\,.\,L = \frac{PL^2}{8} \qquad A_2 = \frac{2}{3}\,.\,\frac{w_0L^2}{8}\,.\,L = \frac{w_0L^3}{12}$$

$$0 \times L + 2M_B\,(L + L) + 0 \times L = -6\,\frac{\frac{PL^2}{8}\times\frac{L}{2}}{L} - 6\,\frac{\frac{w_0L^3}{12}\times\frac{L}{2}}{L}$$

$$4M_B = -\frac{3PL}{8} - \frac{w_0L^2}{4} \Rightarrow M_B = -\left(\frac{3PL}{32} + \frac{w_0L^2}{16}\right)$$



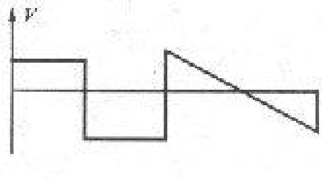
علامت منفی نشان می‌دهد که جهت M_B مخالف جهتی است که فرض کرده‌ایم.

$$\sum M_A = 0 : R'_BL = P\,\frac{L}{2} + M_B \rightarrow R'_B = \frac{19P}{32} + \frac{w_0L}{16}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R'_B - P = 0 \rightarrow R_A = \frac{13P}{32} - \frac{w_0L}{16}$$

$$\sum M_c = 0 : R''_BL - M_B - \frac{w_0L^2}{2} = 0$$

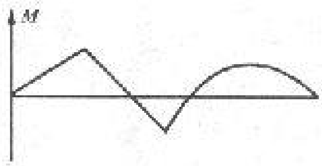
$$\rightarrow R''_B = \frac{3P}{32} + \frac{9w_0L}{16}$$



$$\sum F_y = 0 : R''_B + R_c = w_0L$$

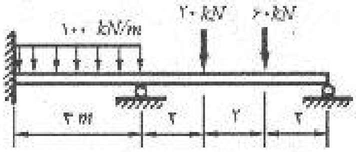
$$\rightarrow R_c = \frac{-3P}{32} + \frac{7w_0L}{16}$$

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{22P}{32} + \frac{10w_0L}{16}$$

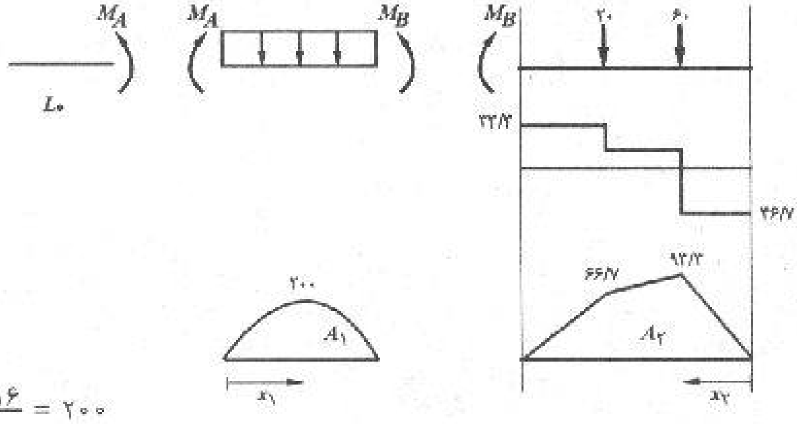


برای کنترل جوابها:

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_B + R_c = P + w_0L$$



مسأله ۱۲-۵۷



$$\frac{qL^2}{۸} = \frac{۱۰۰ \times ۱۶}{۸} = ۲۰۰$$

$$A_1 \bar{x}_1 = \left(\frac{۲}{۳} \times ۴ \times ۲۰۰\right)(۲) = \frac{۳۲۰۰}{۳}$$

$$A_2 \bar{x}_2 = \sum A \bar{x} = \left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۹۳/۳\right)\left(\frac{۴}{۳}\right) + (۲ \times ۶۶/۷)(۳)\left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲۶/۷\right)\left(۲ + \frac{۲}{۳}\right)$$

$$+ \left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶۶/۷\right)\left(۴ + \frac{۲}{۳}\right) = ۹۰۷$$

$$M_0 L_0 + ۲M_A (L_0 + L_1) + M_B L_1 = -۶ \frac{A_1 \bar{x}_1}{L_1}$$

$$L_0 \to ۰ : ۲M_A \times ۴ + M_B \times ۴ = -۶ \frac{\frac{۳۲۰۰}{۳}}{۴} \to ۲M_A + M_B = -۴۰۰ \qquad (۱)$$

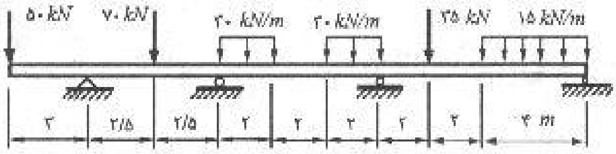
$$M_A . L_1 + ۲M_B (L_1 + L_2) + M_C . L_2 = -۶ \frac{A_2 \bar{x}_2}{L_2}$$

$$M_{۲} \times ۴ + ۲M_B(۴ + ۶) + ۰ = -۶ \times \frac{۹۰۷}{۶} \to ۴M_A + ۲۰M_B = -۹۰۷ \qquad (۲)$$

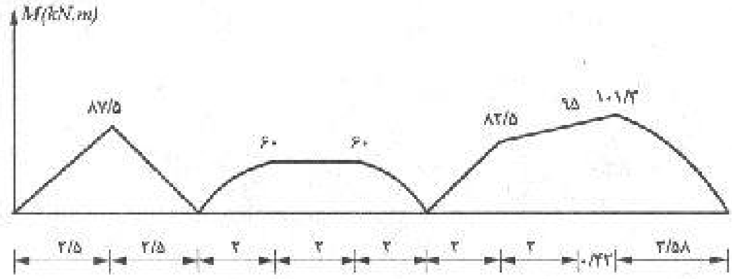
با حل معادلات (۱) و (۲) مقادیر M_A و M_B به‌دست می‌آیند:

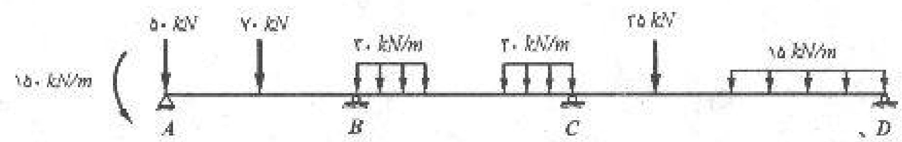
$M_A = -۱۹۷ \, kN.m$

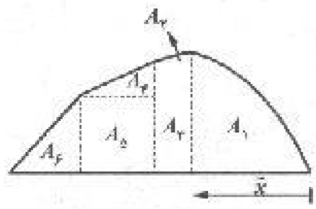
$M_B = -۵/۹۴ \, kN.m$



مسئله ۱۲-۵۸







$$A_۱ = \frac{۲}{۳}(۳/۵۸)(۱۰۱/۳) = ۲۴۱/۷۷$$

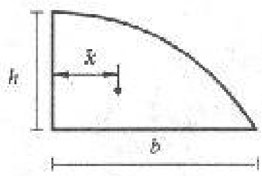
$$\bar{x}_۱ = ۳/۵۸ - \frac{۳(۳/۵۸)}{۸} = ۲/۲۳۸$$

$$A_۲ = \frac{۲}{۳}(۰/۴۲)(۶/۳) = ۱/۷۶۴$$

$$\bar{x}_۲ = ۳/۵۸ + \frac{۳(۰/۴۲)}{۸} = ۳/۷۳۸$$

$$A_۳ = (۰/۴۲)(۹۵) = ۳۹/۹$$

$$\bar{x}_۳ = ۳/۵۸ + ۰/۲۱ = ۳/۷۹$$



$$A = \frac{۲bh}{۳}, \quad \bar{x} = \frac{۳b}{۸}$$

$$A_۴ = \frac{۱}{۲}(۱۲/۵)(۲) = ۱۲/۵ \qquad \bar{x}_۴ = ۴ + \frac{۲}{۳} = ۴/۶۷$$

$$A_۵ = ۲ \times ۸۲/۵ = ۱۶۵ \qquad \bar{x}_۵ = ۴ + ۱ = ۵$$

$$A_۶ = \frac{۱}{۲}(۲)(۸۲/۵) = ۸۲/۵ \qquad \bar{x}_۶ = ۶ + \frac{۲}{۳} = ۶/۶۷$$

$$A\,\bar{x} = \sum A_i\,\bar{x}_i = (۲۴۱/۷۷)(۲/۲۳۸) + (۱/۷۶۴)(۳/۷۳۸) + (۳۹/۹)(۳/۷۹)$$

$$+ (۱۲/۵)(۴/۶۷) + (۱۶۵)(۵) + (۸۲/۵)(۶/۶۷)$$

$$\Rightarrow A\,\bar{x} = ۲۱۳۲/۵$$

$$A_{AB} = \frac{۱}{۲}(۸۷/۵)(۵) = ۲۱۸/۷۵ \quad A_{BC} = ۲ \times \left(\frac{۲}{۳} \times ۲ \times ۶۰\right) + ۲ \times ۶۰ = ۲۸۰$$

معادله سه ممان برای قسمت ABC:

$$(-۱۵۰)(۵) + ۲M_B(۵ + ۶) + M_c \times ۶ = \frac{۶(۲۱۸/۷۵)(۲/۵)}{۵} - \frac{۶(۲۸۰)(۳)}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲۲M_B + ۶M_c = -۷۴۶/۲۵ \qquad (۱)$$

معادله برای سه ممان برای قسمت BCD:

$$M_B \times ۶ + ۲M_c(۶ + ۸) + ۰ - \frac{۶(۲۸۰)(۳)}{۶} - \frac{۶(۲۱۳۲/۵)}{۸}$$

$$\Rightarrow ۶M_B + ۲۸M_c = -۲۴۳۹/۳۸ \qquad (۲)$$

از حل هم زمان معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$M_B = -۱۰/۷۸\,kN.m$ و $M_c = -۸۴/۸۴\,kN.m$

مسائل فصل سیزدهم

۱۳-۱. اگر حد خطی آلمینیوم در ۲۰ درجهٔ سانتیگراد مساوی ۱۹۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آن ۱۰^۵ × ۰/۷ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، ضریب فنریت آن چقدر است.

$$\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{(190)^2}{2\times(0.7\times10^5)} = 0.258$$

۱۳-۲. میله‌ای فولادی به طول ۱ متر و قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر بار انرژی محوری به میزان ۴ نیوتن متر که باعث تنش کششی در میله می‌گردد، می‌باشد. (الف) مطلوبست تعیین حداکثر تنش کششی. ضریب ارتجاعی را مساوی ۱۰^۵ × ۲ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید. (ب) اگر قطر ۰/۵ متر میانی میله به ۲۰ میلی‌متر پیدا کند، تنش حداکثر به چه میزان کاهش یا افزایش پیدا می‌کند.

الف)

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EU}{fV}} \quad , \quad f = 1 \ \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2(2\times10^5)(4000)}{(400\pi)(1000)}} \Rightarrow \sigma_m = 35.68\,N/mm^2$$

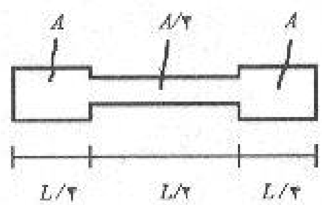
$$U = \frac{\sigma^2 V}{2E}$$

ب)

$$U = \frac{\sigma^2\left(A\cdot\frac{L}{4}\right)}{2E} + \frac{(4\sigma)^2\left(\frac{A}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)}{2E} + \frac{\sigma^2\left(A\cdot\frac{L}{4}\right)}{2E}$$

$$\Rightarrow U = \frac{5\,\sigma^2 AL}{4E}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4EU}{5AL}} = \sqrt{\frac{4(2\times10^5)(4000)}{5(400\pi)(1000)}} = 22.57\,N/mm^2$$



$$\sigma_{max} = 4\sigma = 90.27\,N/mm^2$$

۱۳-۳. میله‌ای با مقطع مربع به ابعاد ۵۰ × ۵۰ میلی‌متر و طول ۱ متر که از جنس یکی از آلیاژهای فولاد می‌باشد، قطعه‌ای از یک ماشین است که باید بار انرژی ۱۰۰ نیوتن متر را تحمل کند. حد خطی این آلیاژ چقدر باید باشد تا بتواند بار فوق را با ضریب اطمینان ۴ به طور ارتجاعی تحمل کند. ضریب ارتجاعی آلیاژ مساوی ۱۰^۵ × ۲ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,dV = \frac{\sigma^2}{2E}\int dV \Rightarrow U = \frac{\sigma^2}{2E}A.l$$

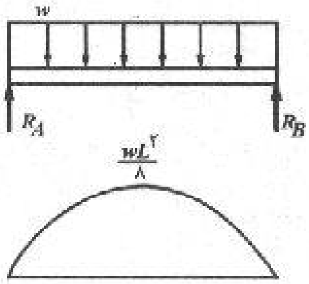
$$100\times10^3\,(N.mm)\times 4 = \frac{\sigma^2}{2\times2\times10^5}\times50\times50\times1000 \Rightarrow \sigma = 253\,N/mm^2$$

۱۳-۴. نشان دهید که اگر تنش اولیه در یک میلهٔ تحت تأثیر بار محوری مساوی σ_i باشد و این تنش به میزان σ_e تغییر کند، به طوری که تنش ثانوی به $\sigma_f = \sigma_i + \sigma_e$ برسد، تغییرات انرژی کرنشی برای واحد حجم مساوی $(\sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e)/(2E)$ می‌باشد. نتایج را به‌صورت نمودار شکل ۱۳-۱-ب تفسیر کنید.

$$U_1 = \frac{\sigma_i^2}{2E} \qquad U_2 = \frac{(\sigma_i + \sigma_e)^2}{2E}$$

$$U_2 - U_1 = \frac{(\sigma_i + \sigma_e)^2}{2E} - \frac{\sigma_i^2}{2E} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e - \sigma_i^2}{2E} \Rightarrow \Delta U = \frac{\sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e}{2E}$$

۱۳-۵. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی ناشی از خمش یک تیر ساده تحت تأثیر بار گسترده؛ یکنواخت و مقطع مربع مستطیل مساوی $(\sigma_{max}^2/2E)(\frac{8}{45}AL)$ می‌باشد که در آن σ_{max}^2 حداکثر تنش خمشی، A سطح مقطع تیر و L دهانهٔ تیر می‌باشد.



$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{wL}{2}$$

$$M_x = \frac{wL}{2}.x - w\frac{x^2}{2}$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{max} = \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8}$$

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)^2}{2EI}dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(\frac{w^2L^2}{4}x^2 + \frac{w^2}{4}x^4 - \frac{w^2L}{2}x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[\frac{w^2L^2}{12}x^3 + \frac{w^2}{20}x^5 - \frac{w^2L}{8}x^4\right]_0^L = \frac{1}{2EI}\left[\frac{w^2L^5}{12} + \frac{w^2L^5}{20} - \frac{w^2L^5}{8}\right]$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EI}.\frac{w^2L^5}{120}$$

$$\sigma_m = \frac{M_m c}{I} \Rightarrow M_m = \frac{\sigma_m I}{c} \Rightarrow \frac{wL^2}{8} = \frac{\sigma_m I}{c} \Rightarrow w^2L^4 = 64\left(\frac{\sigma_m I}{c}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2EI}\frac{w^2L^5}{120} = \frac{1}{2EI}\frac{64}{120}\left(\frac{\sigma_m I}{c}\right)^2 L = \frac{\sigma_m^2}{2E}\times\frac{8}{15}\times\frac{I}{c^2}\times L = \frac{\sigma_m^2}{2E}\times\frac{8}{15}\times\frac{bh}{3}L$$

$$\Rightarrow U = \frac{\sigma_m^2}{2E}\left(\frac{8}{45}\times A.L\right)$$

۱۳-۶. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی برای یک تیر طره‌ای با مقطع مربع مستطیل که بار متمرکز P را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند، مساوی $(U)_{bending} = (\sigma_{max}^2/2E)(Vol/9)$ می‌باشد.

$$U = \int_{۰}^{L} \frac{M^{۲}\, dx}{۲EI} = \frac{۱}{۲EI}\int_{۰}^{L} (-Px)^{۲}\, dx = \frac{P^{۲}}{۲EI}\int_{۰}^{L} x^{۲}dx$$

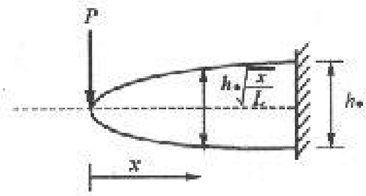
$$\Rightarrow U = \frac{P^{۲}L}{۶EI}$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \to M_m = \frac{\sigma_m I}{c} \to PL = \frac{\sigma_m I}{c}$$

$$U = \frac{(PL)L}{۶EI} = \frac{\left(\sigma_m \frac{I}{c}\right)^{۲} L}{۶EI} = \frac{\sigma_m^{۲} IL}{۶Ec^{۲}} = \frac{\sigma_m^{۲}}{۲E^{۲}} \cdot \frac{\frac{۱}{۱۲} bh^{۳} . L}{۳\frac{h^{۲}}{۴}} = \frac{\sigma_m^{۲}}{۲E}\, \frac{bhL}{۹}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\sigma_m^{۲}}{۲E}\, \frac{Vol}{۹}$$

۱۳-۷. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی برای یک تیر طره‌ای با مقاومت ثابت که دارای یک پروفیل سهمی است (به فصل دهم مراجعه نمایید) و بار متمرکز P را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند، مساوی $(U)_{bending} = (\sigma_{max}^{۲} / ۲E)(Vol/۳)$ می‌باشد.



$$U = \frac{M^{۲}\, dx}{۲EI}$$

$$M = -Px$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}\, bh^{۳} = \frac{۱}{۱۲}\, b \left(h_۰ \sqrt{\frac{x}{L}}\right)^{۳} = \frac{b}{۱۲}\, h_۰^{۳}\, \frac{x}{L}\sqrt{\frac{x}{L}}$$

$$U = \int_{۰}^{L} \frac{P^{۲}x^{۲}}{۲E\left(\frac{b}{۱۲}\, h_۰^{۳}\, \frac{x}{L}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)}\, dx = \frac{۶P^{۲}}{Ebh_۰^{۳}}\int_{۰}^{L} \frac{x^{۲}dx}{\frac{x}{L}\sqrt{\frac{x}{L}}} \qquad \frac{x}{L} = u \to \begin{cases} x^{۲} = L^{۲}u^{۲} \\ dx = Ldu \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{L} \frac{x^{۲}dx}{\frac{x}{L}\sqrt{\frac{x}{L}}} = \int_{۰}^{L} \frac{(L^{۲}u^{۲})Ldu}{uu^{\frac{۱}{۲}}} = L^{۳}\int \frac{u^{۲}}{u^{\frac{۳}{۲}}}\, du = L^{۳}\int u^{\frac{۱}{۲}}\, du = L^{۳}\left[\frac{۲}{۳}\, u^{\frac{۳}{۲}}\right]$$

$$= L^{۳}\left[\frac{۲}{۳}\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{L} = \frac{۲}{۳}\, L^{۳}$$

$$U = \frac{۶P^{۲}}{Ebh_۰^{۳}}\left(\frac{۲}{۳}\, L^{۳}\right) = \frac{۴P^{۲}L^{۳}}{Ebh_۰^{۳}}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \to M^{۲} = \frac{\sigma^{۲} I^{۲}}{c^{۲}} = \sigma^{۲}\, \frac{\frac{۱}{۱۴۴}\, b^{۲}h_۰^{۶}}{\frac{h_۰^{۲}}{۴}} \Rightarrow \sigma^{۲}\left(\frac{۱}{۳۶}\, b^{۲}h_۰^{۴}\right)$$

$$U = \frac{۴(PL)^{۲}L}{Ebh_۰^{۳}} = \frac{۴\sigma^{۲}\left(\frac{۱}{۳۶}\, b^{۲}h_۰^{۴}\right)L}{Ebh_۰^{۳}} = \frac{\sigma^{۲}}{۲E}\left(\frac{۲}{۹}\, bLh_۰\right)$$

$$\frac{V_۰L}{۳} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\, h_۰L\right)b = \frac{۲}{۹}\, bLh_۰ \to U = \frac{\sigma^{۲}}{۲E}\left(\frac{V_۰L}{۳}\right)$$

۱۳-۸. مطلوب است تعیین حداکثر انرژی کرنشی که یک فنر مارپیچی می‌تواند تحت تأثیر نیروی کششی جذب کند. قطر خارجی فنر ۲۲۰ میلی‌متر و قطر مفتولی که فنر از آن ساخته شده است، مساوی ۲۰ میلیمتر می‌باشد. این فنر دارای ۱۰ مارپیچ فعال است و تنش برشی مجاز آن ۵۵۰ نیوتن بر میلیمترمربع می‌باشد. از اثر برش مستقیم و تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید. ضریب ارتجاعی برشی مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمترمربع می‌باشد.

$$\tau_m = \frac{Tc}{J} \rightarrow T = \frac{\tau_m J}{c} \quad , \varphi = \frac{TL}{JG}$$

$$U = \frac{1}{2} T \varphi = \frac{T^2 L}{2GJ} = \frac{\tau_m^2 J^2 L}{2GJ \, . \, c^2} = \frac{\tau_m^2 \, . \, \frac{\pi c^4}{2} \, . \, L}{2G \, . \, c^2}$$

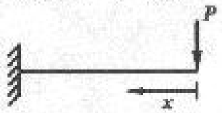
$$U = \frac{\tau_m^2 AL}{4G} \qquad A = \pi c^2 \quad و \quad L = 2\pi R N$$

$$U = \frac{(550)^2 (100\pi)(2\pi \times 100 \times 10)}{4(0/84 \times 10^5)} = 1777116/3 \, N.mm = 1/77 \, kN.m$$

البته می‌توانستیم از رابطه زیر استفاده نماییم:

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2GU}{fV}} \quad , \quad f = 0/5 \rightarrow U = \frac{\tau_m^2 V}{4G}$$

۱۳-۹. یک تیر طره‌ای کوچک به مقطع مستطیل ۱۵۰ × ۵۰ میلیمتر با یک نیروی متمرکز P که بر انتهای آن وارد می‌شود، در نظر بگیرید. با صرف نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین (الف) تغییر مکان حداکثر ناشی از خمش و برش در صورتی که دهانهٔ تیر مساوی ۱۵۰ میلیمتر و مقدار نیروی متمرکز مساوی ۱۵ کیلونیوتن باشد. (ب) دهانه تیر چقدر باشد تا تغییر مکان ناشی از خمش مساوی تغییر مکان ناشی از برش باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $0/8 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمترمربع در نظر بگیرید.



$$U_m = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 \, dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L x^2 \, dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_V = \int_0^L f_s \frac{V^2 dx}{2GA}$$

برای مقطع مستطیل: $f_s = \frac{6}{5}$

$$U_V = \frac{6P^2}{10 \, GA} \int_0^L dx = \frac{6P^2 L}{10 \, GA}$$

$$U = U_m + U_V = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{6P^2 L}{10 \, A} = \frac{1}{2} P V_{max} \rightarrow V_{max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6}{5} \frac{PL}{GA}$$

$$V_{max} = \frac{(15 \times 10^3)(150)^3}{3(2 \times 10^5) \times \frac{(50)(150)^3}{12}} + \frac{6(15 \times 10^3)(150)}{5(0/8 \times 10^5)(50 \times 150)} = 58/5 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_m = \sigma_V \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} = \frac{6PL}{5GA} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{18EI}{5GA}} = 130 \, mm$$

۱۳-۱۰. یک تیر ساده با مقطع مستطیل و دهانهٔ L توسط بار متمرکز P در وسط دهانه بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن تیر و با مساوی قرار دادن انرژی داخلی با انرژی خارجی، مطلوبست تعیین (الف) تغییر مکان حداکثر ناشی از خمش. (ب) تغییر مکان حداکثر ناشی از تغییر شکلهای برشی.

$$U = \int_{0}^{L} \frac{M^2 dx}{2EI}$$

به علت تقارن می‌توان نوشت:

$$U_m = 2\int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx}{2EI}$$

$$= \frac{P^2}{4EI}\int_{0}^{\frac{L}{2}} x^2\, dx = \frac{P^2x^3}{12EI}\Big|_{0}^{\frac{L}{2}} \Rightarrow U_m = \frac{P^2L^3}{96EI}$$

$$\frac{1}{2}Pv_m = U_m = \frac{P^2L^3}{96EI} \Rightarrow v_m = \frac{PL^3}{48EI}$$

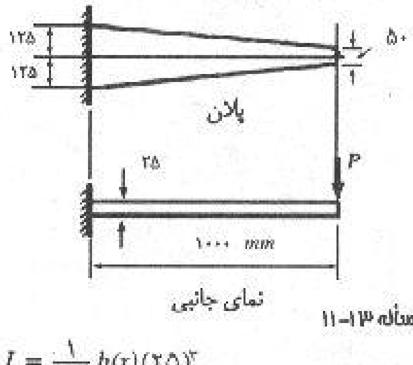
$$U_V = \int_{0}^{L} f_s \frac{V^2 dx}{2GA}$$

برای مقطع مستطیل $f_s = \frac{6}{5}$

$$U_V = 2\int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{6}{5}\ \frac{(\frac{P}{2})^2\, dx}{2GA} = \frac{3}{10}\,\frac{P^2}{GA}\int_{0}^{\frac{L}{2}} dx = \frac{3P^2L}{20GA}$$

$$\frac{1}{2}Pv_V = U_V = \frac{3P^2L}{20GA} \Rightarrow v_V = \frac{3PL}{10GA}$$

۱۳-۱۱. با استفاده از روشهای انرژی، مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل در اثر نیروی متمرکز $P = 500$ نیوتن. فقط تغییر شکلهای ناشی از خمش را در نظر بگیرید و از تغییر شکلهای برشی صرف‌نظر نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلیمترمربع در نظر بگیرید.



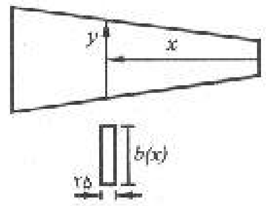
مسئله ۱۳-۱۱

$$I = \frac{1}{12}\,b(x)(25)^3$$

$$y - 25 = \frac{125 - 25}{1000 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = 0/1x + 25$$

$$b(x) = 2y \Rightarrow b(x) = 0/2x + 50$$

$$\rightarrow I = \frac{25^3}{12}\,(0/2x + 50)$$

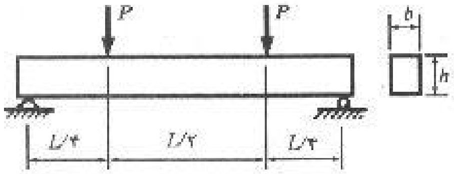


$$U_m = \int_0^L \frac{M^2 dx}{۲EI} = \int_0^{۱۰۰۰} \frac{(-Px)^۲ . dx}{۲E\left[\frac{۲۵^۳}{۱۲}(۰/۲x+۵۰)\right]}$$

$$= \frac{۶P^۲}{(۲۵)^۳E}\int_0^{۱۰۰۰} \frac{x^۲}{۰/۲x+۵۰} = \frac{۶(۵۰۰)^۲}{(۲۵)^۳(۲\times ۱۰^۵)}(۱۷/۵۳\times ۱۰^۵) = ۸۴۱/۴۴$$

$$\frac{۱}{۲}Pv_m = ۸۴۱/۴۴ \rightarrow v_m = ۳/۳۶\, mm$$

۱۳-۱۲. (الف) مطلوب است تعیین کنید انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر نشان داده شده در شکل در اثر بارهای وارده بر حسب پارامترهای P و L و EI (ب) با مساوی قرار دادن کار ناشی از نیروهای خارجی با تغییرات انرژی کرنشی، تغییر مکان تیر را در محل تأثیر بارهای متمرکز به دست آورید. (راهنمایی: به خاطر تقارن، تغییر مکان در محل تاثیر بارهای متمرکز مساوی می‌باشد).



مسأله ۱۳-۱۲

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{۲EI}$$

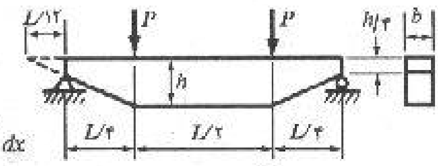
$$۰ < x < \frac{L}{۴} : M = Px \quad , \frac{L}{۴} < x < \frac{L}{۲} : M = Px - P(x - \frac{L}{۴}) = \frac{PL}{۴}$$

$$U = ۲\int_0^{\frac{L}{۲}} \frac{M^۲dx}{۲EI} = \int_0^{\frac{L}{۴}} \frac{(Px)^۲}{EI}dx + \int_{\frac{L}{۴}}^{\frac{L}{۲}} \frac{\left(\frac{PL}{۴}\right)^۲}{EI}dx = \frac{P^۲}{۳EI}x^۳\Big|_0^{\frac{L}{۴}} + \frac{P^۲L^۲}{۱۶EI}x\Big|_{\frac{L}{۴}}^{\frac{L}{۲}}$$

$$= \frac{P^۲L^۳}{۳\times ۶۴EI} + \frac{P^۲L^۳}{۳۲EI} - \frac{P^۲L^۳}{۶۴EI} = \frac{P^۲L^۳}{۴۸EI}$$

$$۲\times\frac{۱}{۲}Pv = U = \frac{P^۲L^۳}{۴۸EI} \Rightarrow v = \frac{PL^۳}{۴۸EI}$$

۱۳-۱۳. مطلوب است تعیین تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل در محل تأثیر بارهای متمرکز با استفاده از روشهای انرژی. لنگر ماند سطح مقطع تیر در نیمهٔ میانی دهانه مساوی I_0 می‌باشد.

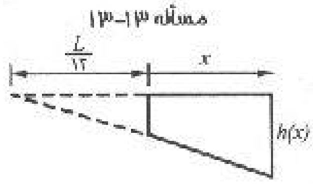


مسأله ۱۳-۱۳

$$۰ < x < \frac{L}{۴} : M = Px$$

$$\frac{L}{۴} < x < \frac{L}{۲} : M = Px - P\left(x - \frac{L}{۴}\right) = \frac{PL}{۴}$$

$$U = ۲\int_0^{\frac{L}{۲}} \frac{M^۲dx}{۲EI} = \int_0^{\frac{L}{۴}} \frac{(Px)^۲dx}{EI(x)} + \int_{\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۴}} \frac{\left(P\frac{L}{۴}\right)^۲dx}{EI_0}$$



$$\frac{h(x)}{x+\frac{L}{۱۲}} = \frac{\frac{L}{۴}}{\frac{L}{۱۲}} \Rightarrow h(x) = \frac{۳h}{L}\left(x + \frac{L}{۱۲}\right)$$

$$I(x) = \frac{1}{12}\, b\left[\frac{3h}{L}\left(x + \frac{L}{12}\right)\right]^3 = \frac{1}{12}\, bh^3\left(\frac{3x}{L} + \frac{1}{4}\right) = I_0\left(\frac{3x}{L} + \frac{1}{4}\right)$$

$$U = \frac{P^2}{EI_0}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{x^2 dx}{\left(\frac{3x}{L} + \frac{1}{4}\right)^3} + \frac{P^2L^2}{16EI_0}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} dx$$

$$A = \frac{64P^2L^3}{EI_0}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{x^2}{(12x + L)^3}\, dx + \frac{P^2L^2}{16EI_0}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right)$$

$$12x + L = u \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u - L}{12} \rightarrow x^2 = \dfrac{(u - L)^2}{12^2} \\ dx = \dfrac{du}{12} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{x^2}{(12x + L)^3}\, dx = \int \frac{(u - L)^2}{12^2\, u^3}\,\frac{du}{12} = \frac{1}{12^3}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2L}{u^2} + \frac{L^2}{u^3}\right) du = \frac{1}{12^3}\left[\ln u + \frac{2L}{u} - \frac{L^2}{2u^2}\right]$$

$$= \frac{1}{12^3}\left[\ln\,(12x + L)\right] + \frac{2L}{12x + L} - \frac{L^2}{2(12x + L)^2}\Bigg|_0^{\frac{L}{4}} = \frac{0/355}{12^3}$$

$$A = \frac{64P^2L^3}{EI_0}\left(\frac{0/355}{12^3}\right) + \frac{P^2L^3}{64EI_0} = (0/029)\,\frac{P^2L^3}{EI_0}$$

$$2 \times \frac{1}{2}Pv = 0/029\,\frac{P^2L^3}{EI_0} \rightarrow v = 0/029\,\frac{PL^3}{EI_0}$$

۱۳-۱۴. اگر در مثال ۱۳-۷ فنر حذف گردد و ارتفاع سقوط آزاد جرم ۳/۰۶ کیلوگرمی مساوی ۰/۵ متر باشد، حداکثر تنش ایجاد شده در میله چقدر خواهد بود.

$$\Delta_{st} = \frac{PL}{AE} = \frac{30 \times 500}{177 \times 2 \times 10^5} = 4/24 \times 10^{-4}\, mm$$

$$P_{dyn} = P_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}\right) = 30\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 500}{4/24 \times 10^{-4}}}\right) = 46117N$$

$$\sigma_{dyn} = \frac{P_{dyn}}{A} = \frac{46117}{177} = 260/5\, MPa$$

۱۳-۱۵. مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل یک فنر مارپیچی در اثر سقوط آزاد یک جرم ۵۰ کیلوگرمی بر روی آن از ارتفاع ۲۰۰ میلیمتر. قطر خارجی فنر که از مفتولی فولادی به قطر ۴۸ میلیمتر ساخته شده، مساوی ۴۰۰ میلیمتر می‌باشد. فنر دارای ۱۲ مارپیچ فعال می‌باشد. از تغییر شکل ناشی از برش مستقیم و اینرسی (مانند) فنر صرف نظر نمایید. ضریب ارتجاعی برشی مساوی $0/8 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.

$$\Delta_{st} = \frac{64P\bar{r}^3N}{Gd^4} \qquad F = mg = 50 \times 9/81 = 490/5 \quad و \quad \bar{r} = \frac{400}{2} - \frac{48}{2} = 176\,mm$$

$$\Delta_{st} = \frac{(64)(490/5)(176)^3(12)}{(0/8 \times 10^5)(48)^4} = 4/8\,mm$$

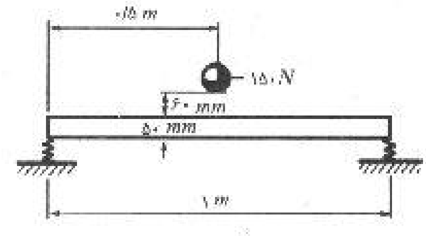
$$\Delta_{max} = \Delta_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}\right) = 4/8\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200}{4/8}}\right) \Rightarrow \Delta_{max} = 48/9\,mm$$

۱۳-۱۶. یک تیر طره‌ای استوانه‌ای چوبی به قطر ۲۰۰ میلیمتر و دهانه ۴ متر مفروض است. اگر یک جرم ۸۰ کیلوگرمی از ارتفاع ۱۵۰ میلیمتر بر انتهای آزاد آن سقوط کند، حداکثر تغییر مکان لحظه‌ای چقدر خواهد بود. از اینرسی تیر صرف نظر نمایید و ضریب ارتجاعی را مساوی $0/08 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(80 \times 9/81)(4000)^3}{3(0/08 \times 10^5)\left[\frac{\pi(200)^4}{64}\right]} = 26/6\,mm$$

$$\Delta_{max} = 26/6\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 150}{26/6}}\right) = 119/7\,mm$$

۱۳-۱۷. مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل و تنش خمشی لحظه‌ای برای تیر نشان داده شده در شکل وقتی که جرم ۱۵/۳ کیلوگرمی از ارتفاع ۶۰ میلیمتری بر روی آن سقوط می‌کند. مسأله را در دو حالت حل نمایید (الف) وقتی که تکیه‌گاههای تیر صلب باشد (ب) تیر در روی تکیه‌گاههای فنری با ثابت $K = 300$ کیلونیوتن بر متر تکیه داشته باشد. مقطع تیر مربع می‌باشد.



مسأله ۱۳-۱۷

الف)

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(150)(1000)^3}{48(2 \times 10^5)\left[\frac{1}{12}(50)(50)^3\right]} = 0/03\,mm$$

$$\Delta_{max} = 0/03\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0/03}}\right) = 1/93\,mm$$

$$(\sigma_{max})_{st} = \frac{M}{S} = \frac{P\frac{L}{4}}{S} = \frac{150 \times 1000}{\frac{4 \times 50^3}{6}} = 1/8\,N/mm^2$$

$$(\sigma_{max})_{dyn} = ۱/۸\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۲\times ۶۰}{۰/۰۳}}\right) = ۱۱۵/۷\, N/mm^{۲}$$

$$\Delta_{spring} = \frac{F}{K} = \frac{۱۵۰}{۲} = ۰/۲۵$$

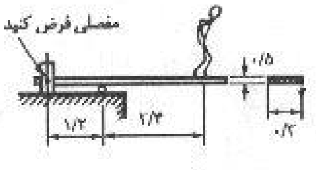
ب)

$$\Delta_{st} = \Delta_{beam} + \Delta_{spring} = ۰/۰۳ + ۰/۲۵ = ۰/۲۸\, mm$$

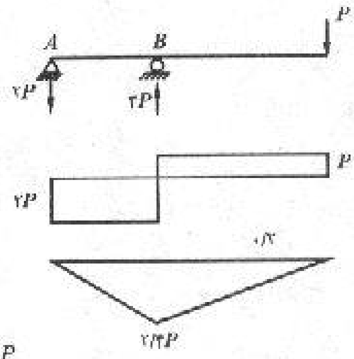
$$\Delta_{max} = ۰/۲۸\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۲\times ۶۰}{۰/۲۸}}\right) = ۶/۱\, mm$$

$$(\sigma_{max})_{dyn} = ۱/۸\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۲\times ۶۰}{۰/۲۸}}\right) = ۳۹/۱\, N/mm^{۲}$$

۱۸-۱۳. شخصی به جرم ۸۰ کیلوگرم از ارتفاع ۰/۶ متری بر روی یک تخته شیرجه می‌پرد. اگر ابعاد تخته مطابق شکل باشد، حداکثر تنش خمشی چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی $۰/۱ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلیمترمربع فرض نمایید. برای تعیین تغییر شکل تخته از هر روشی می‌توانید استفاده نمایید.



مسأله ۱۸-۱۳



$$\sum M_B = ۰ : -P\times ۲/۴ + R_A \times ۱/۲ = ۰ \rightarrow R_A = ۲P$$

$$\sum F_y = ۰ : R_B = P + R_A = ۳P$$

$$EI\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} = -۲P < x > + ۳P < x - ۱/۲ >$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -P < x >^{۲} + \frac{۳}{۲}P < x - ۱/۲ >^{۲} + C_۱$$

$$EI\, v = -\frac{P}{۳} < x >^{۳} + \frac{۱}{۲}P < x - ۱/۲ >^{۳} + C_۱ x + C_۲$$

$$v(۰) = ۰ \rightarrow c_۲ = ۰ \quad \text{و} \quad v(۱/۲) = ۰ \rightarrow c_۱ = ۰/۴۸P$$

$$v = \frac{۱}{EI}\left[-\frac{P}{۳} < x >^{۳} + \frac{P}{۲} < x - ۱/۲ >^{۳} + ۰/۴۸P\right.$$

$$v\,(۳/۶) = \frac{۱}{EI}\left[-\frac{P}{۳}(۳/۶)^{۳} + \frac{P}{۲}(۳/۶ - ۱/۲)^{۳} + ۰/۴۸P\right] = \frac{-۸/۱۶P}{EI}$$

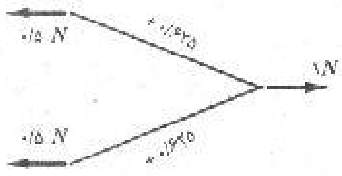
$$= \frac{-۸/۱۶\times(۸۰\times ۹/۸۱)}{(۰/۱\times ۱۰^{۱۱})\left[\frac{۱}{۱۲}(۰/۳)(۰/۰۵)^{۳}\right]} = ۰/۲m \qquad \Delta_{st} = ۰/۲m$$

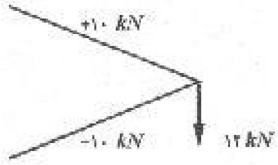
$$P_{dyn} = P_{st}\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۲h}{\Delta_{st}}}\right) = (۸۰\times ۹/۸۱)\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۲\times ۰/۶}{۰/۲}}\right) = ۲۸۶۱/۲N$$

$$\sigma_{dyn} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۲/۴P)c}{I} = \frac{(۲/۴\times ۲۸۶۱/۲)\left(\frac{۰/۰۵}{۲}\right)}{\frac{۱}{۲}(۰/۳)(۰/۰۵)^{۳}} = ۵۵MPa$$

۱۳-۱۹. در مثال ۱۳-۹، تغییر مکان افقی نقطهٔ B را برای سه حالت ذکر شده، به دست آورید.

الف)





$$F = \frac{\sqrt{(۱۲۰۰)^۲ + (۹۰۰)^۲}}{۱۲۰۰} \times ۰/۵ = ۰/۶۲۵N$$

$$\delta = \sum \frac{P_a P_L L}{AE} = \frac{(+۰/۶۲۵)(+۱۰۰۰۰)(۱۵۰۰)}{(۹۰)(۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{(+۰/۶۲۵)(-۱۰۰۰۰)(۱۵۰۰)}{(۱۵۰)(۲ \times ۱۰^۵)}$$

$$= +۰/۲mm$$

یعنی نقطه B به اندازه $۰/۲mm$ به‌طرف راست تغییر مکان می‌دهد.

ب)

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \bar{f}.\ \Delta L = (+۰/۶۲۵)(-۳) + (۰/۶۲۵)(۰) = -۱/۸۷۵N.mm$$

پس $\Delta = -۱/۸۷۵$ یعنی نقطه B به اندازه $۱/۸۷۵mm$ به‌طرف چپ تغییر مکان می‌دهد.

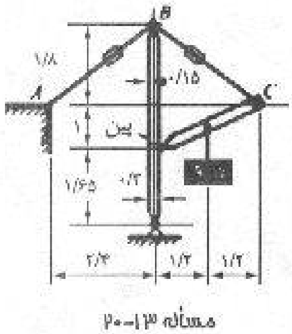
ج) $\Delta = (۱۲ \times ۱۰^{-۶})(۶۰)(۱۵۰۰) = -۱/۰۸mm$

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \bar{f}.\ \Delta L = (۰/۶۲۵)(-۱/۰۸) = -۰/۶۷۵N.mm$$

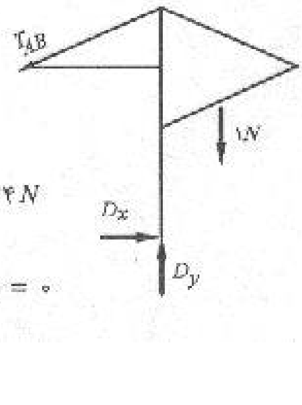
پس: $\Delta = -۰/۶۷۵$

در این حالت تغییر مکان نقطه B $۰/۶۷۵mm$ به‌طرف چپ می‌باشد.

۱۳-۲۰. برای دکل نشان داده شده در شکل، مطلوب است: (الف) تغییر مکان قائم بار W در اثر افزایش طول میلهٔ AB به میزان ۱۰ میلیمتر. (ب) میلهٔ BC چقدر باید کوتاه شود تا بار W به وضعیت اولیه خود برگردد. (از روش کار مجازی استفاده نمایید)



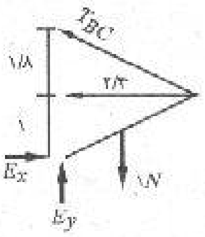
مسأله ۱۳-۲۰



$$\sum M_D = ۰ \circlearrowleft + :$$

$$T_{AB}\left(\frac{۲/۴}{۳}\right)(۱/۸ + ۱ + ۱/۶۵) - (۱)(۱/۲) = ۰ \Rightarrow T_{AB} = ۰/۳۴N$$

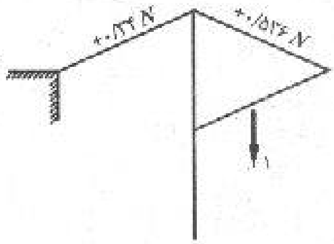
$$\sum M_E = ۰ \circlearrowleft + : T_{BC}\left(\frac{۲/۴}{۳}\right)(۱) + T_{BC}\left(\frac{۱/۸}{۳}\right)(۲/۴) - (۱)(۱/۲) = ۰$$



$$\Rightarrow T_{BC} = ۰/۵۳۶\,N$$

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \bar{f}.\ \Delta L = (۰/۳۴)(۱۰) + (۰/۵۳۶)(۰) + \ldots \times (۰) + \ldots = ۳/۴$$

$$\Rightarrow \Delta = ۳/۴\,mm$$

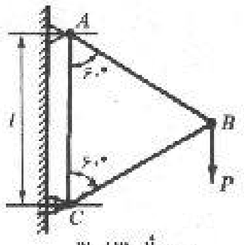


$$\bar{1} \times \Delta = ۰ : (۰/۳۴)(۱۰) + (۰/۵۳۶)(-x) = ۰$$

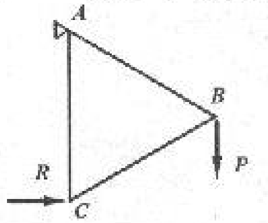
$$\Rightarrow x = ۶/۳۴\,mm$$

پس میله BC به اندازه $۶/۳۴\,mm$ باید کوتاه شود تا W به وضعیت اولیه برگردد.

۱۳-۲۱. یک سیستم مفصلی سه عضوی که سطح مقطع هر یک از اعضای آن مساوی A می‌باشد، مفروض است. (الف) تغییر مکان قائم و افقی در نقطهٔ B را در اثر بار P به دست آورید. (ب) اگر طول عضو AC به اندازهٔ ۱۰ میلیمتر کاهش پیدا کند، تغییر مکان افقی و قائم نقطهٔ B چقدر خواهد شد (از روش کار مجازی استفاده نمایید).



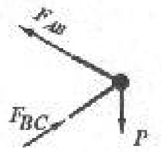
مسئله ۱۳-۲۱



$$\sum M_A = ۰ : P(L\cos ۳۰) - RL = ۰$$

$$\rightarrow R = \frac{P\sqrt{۳}}{۲}$$

گره B:

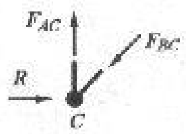


$$\sum F_x = ۰ : F_{AB}\cos ۳۰° - F_{BC}\cos ۳۰° = ۰ \rightarrow F_{AB} = F_{BC} \qquad (۱)$$

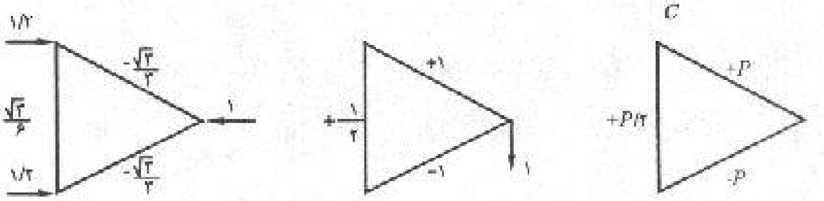
$$\sum F_y = ۰ : F_{AB}\sin ۳۰° + F_{BC}\sin ۳۰° = P \qquad (۲)$$

$$(۱)\ \text{و}\ (۲) \Rightarrow F_{AB} = F_{BC} = P$$

گره C:



$$\sum F_y = ۰ : F_{BC}\sin ۳۰° = F_{AC} \Rightarrow F_{AC} = \frac{P}{۲}$$



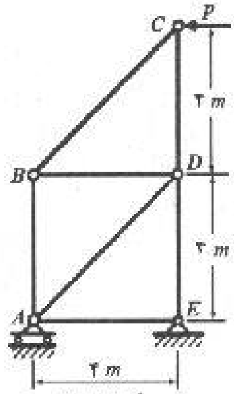
$$\delta_V = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(P)(۱)L}{AE} + \frac{(-P)(-۱)L}{AE} + \frac{(\frac{P}{۲})(\frac{۱}{۲})L}{AE} = \frac{۹}{۴}\frac{PL}{AE}$$

$$\delta_H = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(P)\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)L}{AE} + \frac{(-P)\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)L}{AE} + \frac{\left(\frac{P}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)L}{AE} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}\frac{PL}{AE}$$

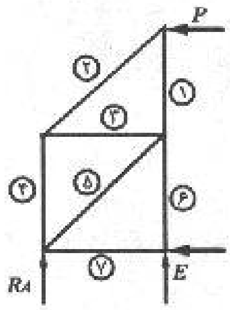
$$\bar{I} \times \Delta_V = \sum \bar{f}.L = \Rightarrow ۱ \times \Delta_V = \left(+\frac{۱}{۲}\right)(-۱۰) = -۵mm \uparrow$$

$$\bar{I} \times \Delta_H = \sum \bar{f}.L = \Rightarrow ۱ \times \Delta_H = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)(-۱۰) = -۲/۸۹\, mm \longrightarrow$$

۱۳-۲۲. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم و افقی گرهٔ C از خرپای نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی متمرکز $P = ۱۰$ کیلو نیوتن به دست آورید. برای سهولت AE تمام اعضا را مساوی واحد فرض کنید.



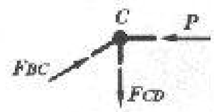
مسأله ۱۳-۲۲



ابتدا پیکر آزاد کل جسم را در نظر می‌گیریم:

$$\sum M_E = ۰ : P \times ۲L = R_A \times L \Rightarrow R_A = ۲P$$

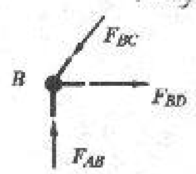
گره C:



$$\sum F_x = ۰ : F_{BC}\frac{\sqrt{۲}}{۲} - P = ۰ \Rightarrow F_{BC} = \sqrt{۲}\,P$$ فشاری

$$\sum F_y = ۰ : F_{BC}\frac{\sqrt{۲}}{۲} - F_{CD} = ۰ \Rightarrow F_{CD} = P$$ کششی

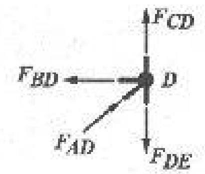
گره B:



$$\sum F_x = ۰ : -F_{BC}\frac{\sqrt{۲}}{۲} + F_{BD} = ۰ \Rightarrow F_{BD} = P$$ کششی

$$\sum F_y = ۰ : F_{AB} - F_{BC}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow F_{AB} = P$$ فشاری

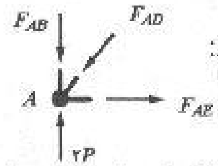
گره D:



$$\sum F_x = ۰ : F_{AD}\frac{\sqrt{۲}}{۲} + F_{BD} = ۰ \Rightarrow F_{AD} = \sqrt{۲}P$$ فشاری

$$\sum F_y = ۰ : F_{CD} + F_{AD}\frac{\sqrt{۲}}{۲} - F_{DE} = ۰ \Rightarrow F_{DE} = ۲P$$ کششی

گره A:

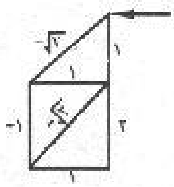


$$\sum F_x = ۰ : F_{AE} - F_{AD}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow F_{AE} = P$$ کششی

برای حالتی که سازه تحت بار واحد قرار دارد با تحلیلی مشابه نیروهای داخلی اعضاء به‌دست می‌آیند:

$$\delta = \frac{NnL}{AE}$$

شماره عضو	N	n	L	NnL
۱	P	۱	L	PL
۲	$-P\sqrt{۲}$	$-\sqrt{۲}$	$L\sqrt{۲}$	$۲\sqrt{۲}PL$
۳	P	۱	L	PL
۴	$-P$	-۱	L	PL
۵	$-P\sqrt{۲}$	$-\sqrt{۲}$	$L\sqrt{۲}$	$۴\sqrt{۲}PL$
۶	$۲P$	۲	L	$۴PL$
۷	P	۱	L	PL

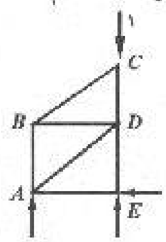


با استفاده از اطلاعات جدول:

$$\delta_H = \frac{PL(۸ + ۴\sqrt{۲})}{AE} = \frac{۱۰^۲ \times ۴ \times (۸ + ۴\sqrt{۲})}{۱}$$

$$\Rightarrow \delta_H = ۱/۶(۲ + \sqrt{۲}) \times ۱۰^۵$$

برای به‌دست آوردن تغییر مکان قائم بار عمودی واحد را در محل مورد نظر اعمال کرده و مثل حالت قبل تغییر مکان قائم را محاسبه می‌کنیم.

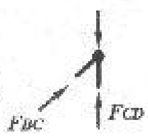


$$\sum M_E = ۰ \rightarrow R_A = ۰$$

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow F_{BC} = ۰$$

$$\sum F_y = ۰ \rightarrow F_{CD} = ۱$$ فشاری

گره C:



$F_{BD} = ۰$ و $F_{AB} = ۰$ و $F_{AD} = ۰$ و $F_{DE} = ۱$ فشاری

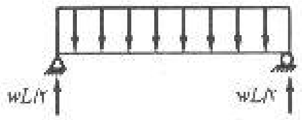
	N	n	L	NnL
۱	P	-۱	L	$-PL$
۲	$-\sqrt{۲}P$	۰	$L\sqrt{۲}$	۰
۳	P	۰	L	۰
۴	$-P$	۰	L	۰
۵	$-\sqrt{۲}P$	۰	$L\sqrt{۲}$	۰
۶	$۲P$	-۱	L	$-۲PL$
۷	P	۰	L	۰

$$\delta_V = \sum \frac{NnP}{AE} = \frac{-۳PL}{AE}$$

$$= -۱/۲ \times ۱۰^{۵}$$

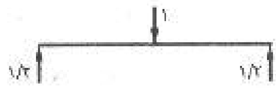
۱۳-۲۳. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان حداکثر یک تیر ساده با EI ثابت و دهانه L را که تحت تأثیر بار گستردهٔ یکنواختی به شدت w می‌باشد، به دست آورید.

بدیهی است محل خیز ماکزیمم در وسط دهانه تیر واقع می‌باشد، بنابراین برای یافتن خیز این نقطه به‌روش کار مجازی، یک بار واحد در این نقطه قرار می‌دهیم.



$$۰ < x < \frac{L}{۲} \; ; M = \frac{wl}{۲}x - \frac{wx^{۲}}{l} \quad m = \frac{۱}{۲} \times x$$

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI}\,dx = \frac{۱}{EI}\int_{۰}^{\frac{L}{۲}} \left(\frac{wlx}{۲} - \frac{wx^{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}x\right)dx$$



$$= \frac{w}{۴EI}\int_{۰}^{\frac{L}{۲}} (Lx^{۲} - x^{۳})\,dx = \frac{w}{۴EI}\left[\frac{Lx^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{\frac{L}{۲}}$$

$$= \frac{w}{۴EI}\left[\frac{L^{۴}}{۲۴} - \frac{L^{۴}}{۶۴}\right] = \frac{w}{۴EI}\left(\frac{۵L^{۴}}{۱۹۲}\right) = \frac{۵wL^{۴}}{۷۶۸}$$

به‌علت تقارن نیمه دیگر تیر هم همین شرایط را دارا می‌باشد بنابراین:

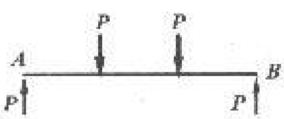
$$\delta = ۲ \times \frac{۵wL^{۴}}{۷۶۸} = \frac{۵wL^{۴}}{۳۸۴}$$

۱۳-۲۴. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان حداکثر یک تیر ساده با EI ثابت و دهانه L را که تحت تأثیر دوبار متمرکز به مقدار p در نقاط $\frac{۱}{۳}$ دهانه قرار دارد، به دست آورید.

$$\sum M_B = ۰ \rightarrow R_A = P$$

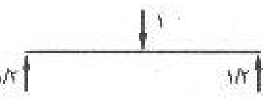
$$\sum M_y = ۰ \rightarrow R_B = P$$

بدیهی است که خیز ماکزیمم در وسط تیر رخ می‌دهد، بنابراین برای محاسبه خیز ماکزیمم به‌روش کار مجازی، یک بار واحد در وسط تیر اعمال می‌کنیم.



$$۰ < x < \frac{L}{۳} \quad M = Px \quad و \quad m = \frac{۱}{۲}x$$

$$\frac{L}{۳} < x < \frac{L}{۲} \quad M = Px - P\left(x - \frac{L}{۳}\right) = P\frac{L}{۳} \quad و \quad m = \frac{۱}{۲}x$$

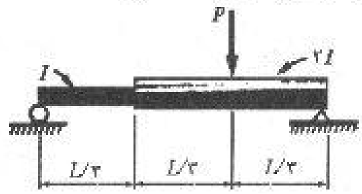


$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}dx = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{Mm}{EI}dx$ به علت تقارن:

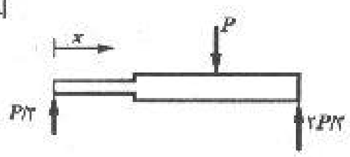
$$\delta = 2\left[\int_0^{\frac{L}{3}} \frac{(Px)\left(\frac{1}{2}x\right)}{EI}dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \frac{\left(P\frac{L}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x\right)}{EI}dx\right] = \frac{P}{EI}\int_0^{\frac{L}{3}} x^2 dx + \frac{PL}{3EI}\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} x dx$$

$$= \frac{P}{3EI}x^3\Big|_0^{\frac{L}{3}} + \frac{P}{6EI}x^2\Big|_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} = \frac{PL^3}{3\times 27EI} - 0 + \frac{PL^3}{24EI} - \frac{PL^3}{54EI} = \frac{23}{648EI}PL^3$$

۱۳-۲۵. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در زیر بار متمرکز بدست آورید.

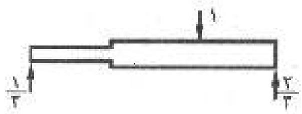


مسئله ۱۳-۲۵



$\sum M_B = 0) + \; : P\frac{L}{3} - R_A L = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P}{3}$

$\sum F_y = \Rightarrow R_B = \frac{2P}{3}$



بار واحد را در هر محلی که خیز آن مورد نظر است اعمال کرده و عکس‌العملها را به دست می‌آوریم.

$0 \le x \le \frac{L}{3}$: $M = \frac{P}{3}x$ و $m = \frac{1}{3}x$ $\quad Mm = \frac{P}{9}x^2$

$\frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3}$: $M = \frac{P}{3}x$ و $m = \frac{1}{3}x$ $\quad Mm = \frac{P}{9}x^2$

$\frac{2L}{3} \le x \le L$: $M = \frac{P}{3}x - P\left(x - \frac{2L}{3}\right) = -\frac{2P}{3}x - \frac{2PL}{3}$

$$m = \frac{1}{3}x - 1\left(x - \frac{2L}{3}\right) = -\frac{2}{3}x + \frac{2L}{3}$$

$$Mm = \left(-\frac{2}{3}Px - \frac{2PL}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}x + \frac{2L}{3}\right) = \frac{4}{9}P\left(x^2 - 2Lx + L^2\right)$$

$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}dx = \int_0^{\frac{L}{3}} \frac{\frac{P}{9}x^2}{EI}dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \frac{\frac{P}{9}x^2}{2EI}dx + \int_{\frac{2L}{3}}^{L} \frac{\frac{4}{9}P(x^2 - 2Lx + L^2)}{2EI}dx$$

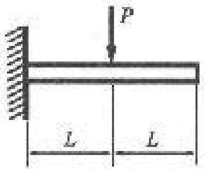
$$= \frac{P}{27EI}x^3 \Big|_0^{\frac{L}{3}} + \frac{P}{54EI}x^3 \Big|_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} + \frac{4P}{18EI}\left[\frac{x^3}{3} - Lx^2 + L^2x\right|_{\frac{2L}{3}}^{L}$$

پس از جاگذاری و خلاصه کردن:

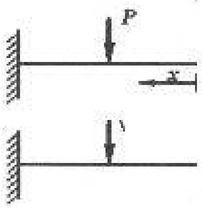
$$\delta = \frac{PL^3}{27EI} - \frac{25PL^3}{54 \times 27EI} - \frac{4PL^3}{54EI} + \frac{16PL^3}{54 \times 3EI}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{13PL^3}{1458}$$

۱۳-۲۶. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در وسط و در انتهای آزاد به دست آورید. EI تیر ثابت می‌باشد و فقط تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



مسأله ۱۳-۲۶

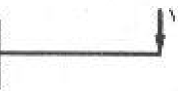


$$0 \le x \le \frac{L}{3} \quad : \quad M = 0 \quad \text{و} \quad m = 0$$

$$L \le x \le 2L \quad : \quad M = -P(x-L) \quad \text{و} \quad m = -(x-L)$$

$$\delta = \int_0^L \frac{0 \times 0}{EI}\,dx + \int_0^{2L} \frac{P(x-L)^2}{EI}\,dx = \frac{P}{3EI}(x-L)^3 \Big|_L^{2L} = \frac{PL^3}{3EI}$$

برای به‌دست آوردن خیز انتها یک بار واحد مجازی در انتهای تیر قرار می‌دهیم:

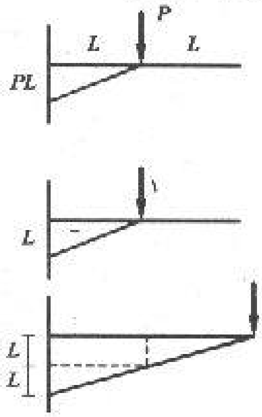


$$0 \le x \le L \quad : \quad M = 0 \quad \text{و} \quad m = -x$$

$$L \le x \le 2L \quad : \quad M = -P(x-L) \quad \text{و} \quad m = -x$$

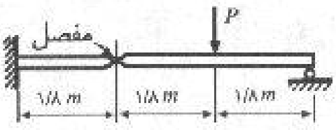
$$\delta = \int_0^L \frac{0 \times (-x)}{EI}\,dx + \int_0^{2L} \frac{P(x-L)x}{EI} = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2}\right)\Big|_L^{2L} = \frac{5PL^3}{6EI},$$

روش ترسیمی



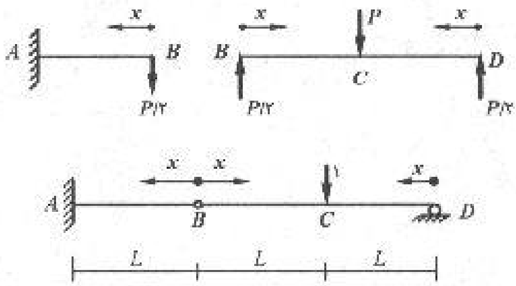
$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{3}(-PL)(-L)\right] = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{2}(-PL)(-L) + \frac{L}{3}(-PL)(-L)\right] = \frac{5PL^3}{6EI}$$



مسئله ۱۳-۲۷

۱۳-۲۷. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در محل تأثیر بار متمرکز به دست آورید. EI تیر در تمام طول آن ثابت می‌باشد و فقط تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



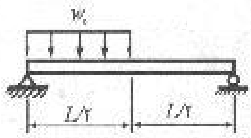
$$AB : M = -\frac{P}{۲}x \quad و \quad m = -\frac{۱}{۲}x$$

$$BC : M = \frac{P}{۲}x \quad و \quad m = \frac{۱}{۲}x$$

$$CD : M = \frac{P}{۲}x \quad و \quad m = \frac{۱}{۲}x$$

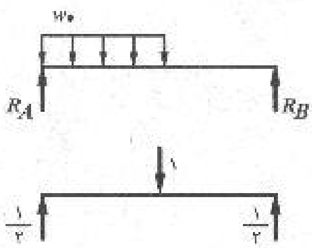
$$\delta_c = \int \frac{Mmdx}{EI} = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^L\left(-\frac{P}{۲}x\right)\left(-\frac{۱}{۲}x\right)dx + \int_۰^L\left(\frac{P}{۲}x\right)\left(\frac{۱}{۲}x\right)dx + \int_۰^L\left(\frac{P}{۲}x\right)\left(\frac{۱}{۲}x\right)dx\right]$$

$$\delta_c = \frac{۳}{EI}\int_۰^L \frac{P}{۴}x^۲\,dx = \frac{P}{۴EI}x^۳\Big|_۰^L = \frac{PL^۳}{۴EI}$$



مسئله ۱۳-۲۸

۱۳-۲۸. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر زیر را در وسط دهانه به دست آورید. EI تیر ثابت می‌باشد.



$$\sum M_B = ۰ \circlearrowright + \;:\; \left(\frac{wL}{۲}\right)\left(\frac{۳L}{۴}\right) - R_A L = ۰ \Rightarrow R_A = \frac{۳wL}{۸}$$

$$۰ < x < \frac{L}{۲} \;:\; M = \frac{۳wL}{۸}x - \frac{wx^۲}{۲} \qquad m = \frac{۱}{۲}x$$

$$\frac{L}{۲} \le x \le L \;:\; M = \frac{۳wL}{۸}x - \frac{wL}{۲}\left(x - \frac{L}{۴}\right) = -\frac{wL}{۸}x + \frac{wL^۲}{۸}$$

$$: \; m = \frac{۱}{۲}x - ۱ \times \left(x - \frac{L}{۲}\right) = -\frac{x}{۲} + \frac{L}{۲}$$

$$۰ \le x \le \frac{L}{۲} \;:\; Mm = \frac{۳}{۱۶}wLx^۲ - \frac{w}{۴}x^۳$$

$$\frac{L}{۲} \le x \le L \;:\; Mm = \frac{wLx^۲}{۱۶} - \frac{wL^۲x}{۸} + \frac{wL^۳}{۱۶}$$

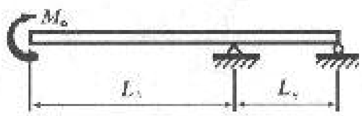
$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{3}{16}wLx^2 - \frac{w}{4}x^3 + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{wL}{16}x^2 - \frac{wL^2}{8}x + \frac{wL^3}{16}\Big]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{wL}{16}x^3 - \frac{w}{16}x^4\right|_0^{\frac{L}{2}} + \frac{wL}{3\times 16}x^3 - \frac{wL^2}{16}x^2 + \frac{wL^3}{16}\Big|_{\frac{L}{2}}^{L}$$

پس از جاگذاری حدود انتگرال و خلاصه کردن:

$$\delta = \frac{5wL^4}{768EI}$$

۱۳-۲۹. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم و دوران انتهای آزاد تیر نشان داده شده در ، کل را به دست آورید.



مسأله ۱۳-۲۹

$$\sum M_A = 0 \circlearrowright + : \quad R_B L_2 - M_0 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{M_0}{L_2}$$

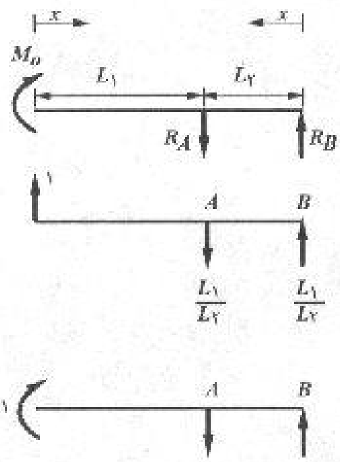
$$\sum F_y = 0 \quad : \quad R_A = \frac{M_0}{L_2}$$

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad 1 \times L_1 - R'_B \times L_2 = 0 \Rightarrow R'_B = \frac{L_1}{L_2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad R'_A = -\frac{L_1}{L_2}$$

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad 1 - R''_B \times L_2 = 0 \Rightarrow R''_B = \frac{1}{L_2}$$

$$\sum M_B = 0 \quad : \quad R''_A = -\frac{1}{L_2}$$



$$0 \le x \le L_1 \; : \quad M = M_0 \quad \text{و} \quad m = 1 \times x = x$$

$$0 \le x \le L_2 \; : \quad M = R_B x = \frac{M_0}{L_2}x \quad \text{و} \quad m = \frac{L_1}{L_2}.x$$

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^{L_1} M_0 x\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^{L_2}\left(\frac{M_0}{L_2}x\right)\left(\frac{L_1}{L_2}x\right)dx = \frac{1}{EI}\left[M_0\frac{x^2}{2}\Big|_0^{L_1} + \frac{M_0 L_1}{L_2^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{L_2}\right]$$

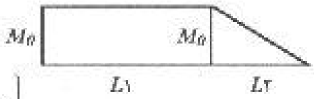
$$\Rightarrow \delta = \frac{M_0}{EI}\left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{L_1 L_2}{3}\right] = \frac{M_0 L_1}{6EI}\left[3L_1 + 2L_2\right]$$

$$0 \le x \le L_1 \; : \quad M = M_0 \quad \text{و} \quad m = 1$$

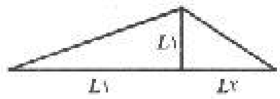
$$0 \le x \le L_2 \; : \quad M = R_B x = \frac{M_0}{L_2}x \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{L_2}x$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^{L_1} (M_0 \times 1)\, dx + \int_0^{L_2} \left(\frac{M_0}{L_2}x\right)\left(\frac{1}{L_2}x\right) dx = \frac{1}{EI}\left[M_0 x \Big|_0^{L_1} + \frac{M_0}{L_2^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{L_2}\right]$$

$$= \frac{M_0}{EI}\left[L_1 + \frac{L_2}{3}\right]$$

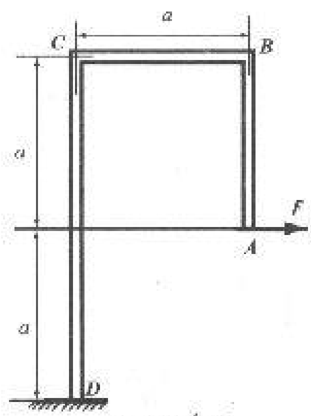


$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{L_1}{2}(M_0)(L_1) + \frac{L_1}{3}(M_0)\ (L_1)\right] = \frac{M_0 L_1}{6EI}\left[3L_1 + 2L_1\right]$$



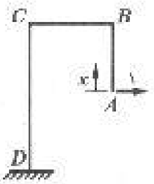
$$\theta = \frac{1}{EI}\left[L_1(M_0)(1) + \frac{L_2}{3}(M_0)(1)\right] = \frac{M_0}{EI}\left[L_1 + \frac{L_2}{3}\right]$$

۱۳-۳۰. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی نقطه A از قاب نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی F به دست آورید. EI ثابت می‌باشد و فقط اثر تغییر شکل خمشی را در نظر بگیرید.

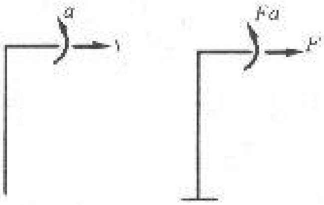


مسأله ۱۳-۳۰

$AB: M = -Fx$ و $m = -x$



$$\delta_1 = \int_0^a \frac{Mm}{EI}\,dx = \int_0^a \frac{Fx^2 dx}{EI} = \frac{Fa^3}{3EI}$$



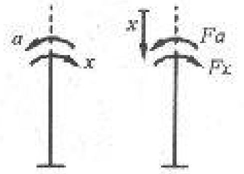
در قسمت BC یک نیروی محوری به اندازه F و یک ممان خمشی مثبت به اندازه Fa وجود دارد و چون در صورت مسأله فقط تغییر شکل در اثر خمش مد نظر می‌باشد، اثر نیروی محوری را در تغییر شکل اعمال نمی‌کنیم.

$BC: M = Fa$ و $m = a$

$$\delta_2 = \int_0^a \frac{Mm}{EI}\,dx = \int_0^a \frac{Fa^2}{EI}\,dx = \frac{Fa^3}{EI}$$

در قسمت CD یک ممان ثابت Fa و یک ممان متغیر Fx وجود دارد.

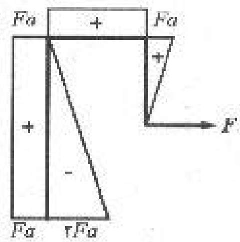
$CD : M = Fa - Fx$ و $m = a - x$



$$\delta_{۳} = \int_{۰}^{۲a} \frac{Mm}{EI} dx = \int_{۰}^{۲a} \frac{F(a-x)^{۲}}{EI} = -\frac{F(a-x)^{۳}}{۳EI} \Big|_{۰}^{۲a} = \frac{۲Fa^{۳}}{۳EI}$$

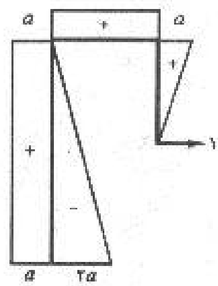
$$\delta = \delta_{۱} + \delta_{۲} + \delta_{۳} = \frac{۲Fa^{۳}}{EI}$$

روش ترسیمی:



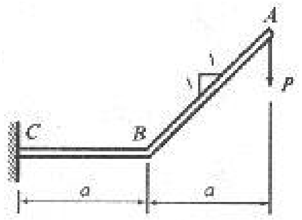
$$\delta_H = \frac{۱}{EI}\Big[\frac{a}{۳}(Fa)(a) + a(Fa)(a) + ۲a\ (Fa)(a)$$

$$+ \frac{۲a}{۲}(Fa)(-۲a) + \frac{۲a}{۲}(-۲Fa)(a) + \frac{۲a}{۳}(-۲Fa)(-۲a)\Big]$$



$$\Rightarrow \delta_H = \frac{۲Fa^{۳}}{EI}$$

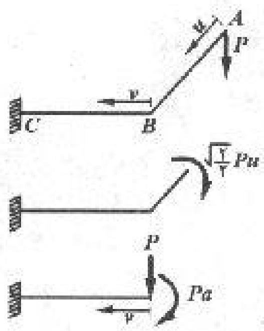
۳۱-۱۲. مطلوب است تعیین تغییر مکان افقی نقطهٔ A و دوران‌های نقاط A و B از سازهٔ نشان داده شده در شکل در اثر نیروی P از روش کار مجازی استفاده نمایید و فقط اثر تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید. EI ثابت می‌باشد.



مسأله ۱۲-۳۱

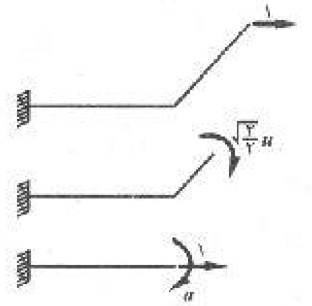
$AB : M = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} Pu$ و $m = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} u$

$BC : M = -Pv - Pa$ و $m = -a$



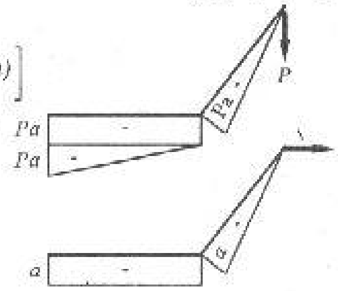
$$\delta = \int_{۰}^{\sqrt{۲}a} \frac{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}Pu\right)\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}u\right)}{EI} du + \int_{۰}^{a} \frac{-(Pv + Pa)(-a)}{EI} dv$$

$$= \int_{۰}^{\sqrt{۲}a} \frac{\frac{۱}{۲}Pu^{۲}}{EI} du + \int_{۰}^{a} \frac{Pva + Pa^{۲}}{EI} dv$$



$$= \frac{Pu^3}{6EI}\Big|_0^{\sqrt{2}a} + \frac{Pa}{EI}\left[\frac{v^2}{2} + av\right]_0^a \Rightarrow \sigma = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\right)\frac{Pa^3}{EI}$$

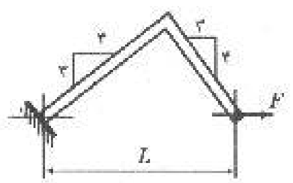
روش ترسیمی:



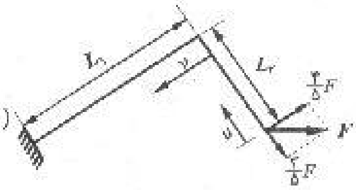
$$\delta_H = \frac{1}{EI}\left[\frac{a\sqrt{2}}{3}(-Pa)(-a) + a(-Pa)(-a) + \frac{a}{2}(-Pa)(-a)\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}Pa^3 + Pa^3 + \frac{Pa^3}{2}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\right)\frac{Pa^3}{EI}$$

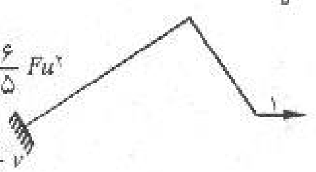
۱۳-۳۲. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم و افقی سازهٔ نشان داده شده در شکل را در نقطهٔ تأثیر نیروی F به دست آورید. EI ثابت می‌باشد و فقط اثر تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



مسأله ۱۳-۳۲



$$\left.\begin{aligned} &\frac{3}{5}L_1 = \frac{4}{5}L_2 \\ &\frac{4}{5}L_1 + \frac{3}{5}L_2 = L \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_2 = \frac{3}{5}L \quad \text{و} \quad L_1 = \frac{4}{5}L \qquad (1)$$



$$0 \le u \le L_2 : \quad M = \frac{4}{5}Fu,\ m = \frac{4}{5}(1).u \rightarrow Mm = \frac{16}{25}Fu^2$$

$$0 \le v \le L_1 : \quad M = \frac{4}{5}FL_2 - \frac{3}{5}Fv \qquad m = \frac{4}{5}L_2 - \frac{3}{5}v$$

$$Mm = \frac{16}{25}FL_2^2 - \frac{24}{25}FL_2v + \frac{9}{25}Fv^2$$

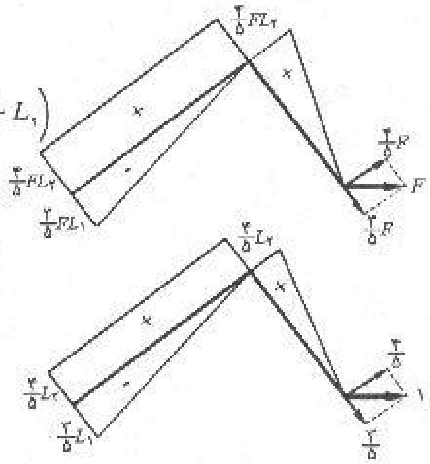
$$\delta_H = \int \frac{Mm}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{L_2}\frac{16}{25}Fu^2\,du + \frac{1}{EI}\int_0^{L_1}\left(\frac{16}{25}FL_2^2 - \frac{24}{25}FL_2v + \frac{9}{25}Fv^2\right)dv$$

$$= \frac{16F}{25EI}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{L_2} + \frac{F}{EI}\left[\frac{16}{25}L_2^2v\Big|_0^{L_1} - \frac{24}{50}L_2v^2\Big|_0^{L_1} + \frac{9}{75}v^3\Big|_0^{L_1}\right.$$

با جاگذاری مقادیر حدود انتگرال و استفاده از روابط (۱) نتیجه می‌شود:

$$\delta_H = ۰/۱۰۷\,\frac{FL^۳}{EI}$$

مسأله را به روش ترسیمی نیز می‌توان حل کرد:



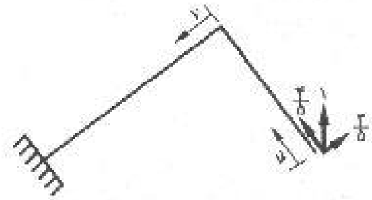
$$\delta_H = \frac{۱}{EI}\Big[\frac{L_۲}{۳}\left(\frac{۴}{۵}FL_۱\right)\left(\frac{۴}{۵}L_۲\right) + L_۱\left(\frac{۴}{۵}FL_۱\right)\left(\frac{۴}{۵}L_۱\right)$$

$$+ \frac{L_۱}{۲}\left(\frac{۴}{۵}FL_۲\right)\left(-\frac{۳}{۵}L_۱\right) + \frac{L_۱}{۲}\left(-\frac{۳}{۵}FL_۱\right)\left(\frac{۴}{۵}L_۲\right)$$

$$+ \frac{L_۱}{۳}\left(-\frac{۳}{۵}FL_۱\right)\left(-\frac{۳}{۵}L_۱\right)\Big]$$

با استفاده از روابط (۱) و خلاصه نمودن:

$$\delta_H = ۰/۱۰۷\,\frac{FL^۳}{EI}$$



$۰ \le u \le L_۲$:

$$M = \frac{۴}{۵}Fu \qquad m = \frac{۳}{۵}u \qquad Mm = \frac{۱۲}{۲۵}Fu^۲$$

$$۰ \le v \le L_۱ \;:\; M = \frac{۴}{۵}FL_۱ - \frac{۳}{۵}Fv \qquad m = \frac{۳}{۵}L_۱ + \frac{۴}{۵}v$$

با توجه به رابطه (۱):

$$Mm = \frac{۱۰۸}{۶۲۵}FL^۲ + \frac{۲۱}{۱۲۵}FLv - \frac{۱۲}{۲۵}Fv^۲$$

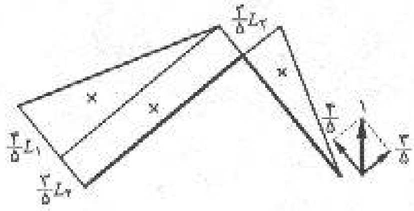
$$\delta_V = \int_۰^{L_۲}\frac{Mm}{EI}\,du + \int_۰^{L_۱}\frac{Mm}{EI}\,dv$$

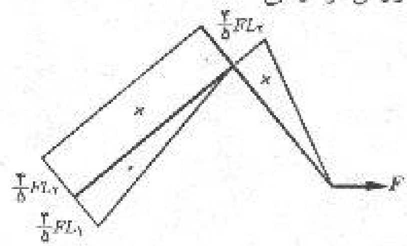
$$\delta_V = \frac{۱}{EI}\int_۰^{\frac{۳}{۵}L}\frac{۱۲}{۲۵}Fu^۲\,du + \frac{۱}{EI}\int_۰^{\frac{۴}{۵}L}\left(\frac{۱۰۸}{۶۲۵}FL^۲ + \frac{۲۱}{۱۲۵}FLv - \frac{۱۲}{۲۵}Fv^۲\right)dv$$

$$= \frac{۱}{EI}\left[\frac{۴}{۲۵}Fu^۳\,\Big|_۰^{\frac{۳}{۵}L} + \frac{۱۰۸}{۶۲۵}FL^۲v\,\Big|_۰^{\frac{۴}{۵}L} + \frac{۲۱}{۲۵۰}FLv^۲\,\Big|_۰^{\frac{۴}{۵}L} - \frac{۴}{۲۵}Fv^۳\,\Big|_۰^{\frac{۴}{۵}L}\right]$$

$$\Rightarrow \delta_V = ۰/۱۴۴۶\,\frac{FL^۳}{EI}$$

روش ترسیمی:





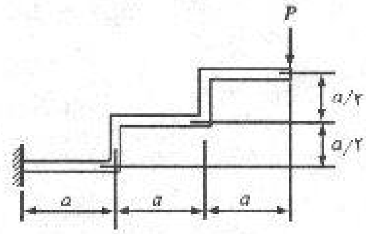
$$\delta_V = \frac{1}{EI}\left[\frac{L_2}{3}\left(\frac{4}{5}FL_2\right)\left(\frac{3}{5}L_2\right) + L_1\left(\frac{4}{5}FL_2\right)\left(\frac{3}{5}L_2\right) + \frac{L_1}{2}\left(\frac{4}{5}FL_2\right)\left(\frac{4}{5}L_1\right)\right.$$

$$\left. - \frac{L_1}{2}\left(\frac{3}{5}FL_1\right)\left(\frac{3}{5}L_2\right) - \frac{L_1}{3}\left(\frac{3}{5}FL_1\right)\left(\frac{4}{5}L_1\right)\right]$$

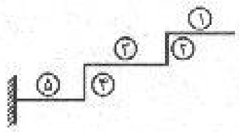
پس از ساده کردن و با استفاده از روابط (۱) داریم:

$$\delta_V = 0/1426\,\frac{FL^3}{EI}$$

۱۳-۳۳. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم انتهای آزاد سازهٔ نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی P به دست آورید. EI ثابت می‌باشد و فقط تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



مسأله ۱۳-۳۳



(۱): $M = -Px$ و $m = -x$

$$\delta_1 = \int_0^a \frac{Px^2}{EI}\,dx = \frac{Pa^3}{3EI}$$

(۲): $M = -Pa$ و $m = -a$

$$\delta_2 = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{Pa^2}{EI}\,dx = \frac{Pa^3}{2EI}$$

(۳): $M = -Pa - Px$ و $m = -a - x$

$$\delta_3 = \int_0^a \frac{P(a+x)^2}{EI} = \frac{P}{3EI}(a+x)^3\Big|_0^a = \frac{7Pa^3}{3EI}$$

(۴): $M = -P \times 2a$ و $m = -2a$

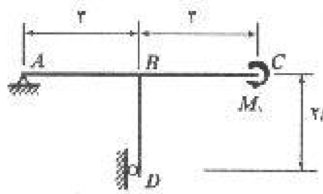
$$\delta_4 = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4Pa^2}{EI}\,dx = \frac{2Pa^3}{EI}$$

(۵): $M = -P \times 2a - px$ و $m = -2a - x$

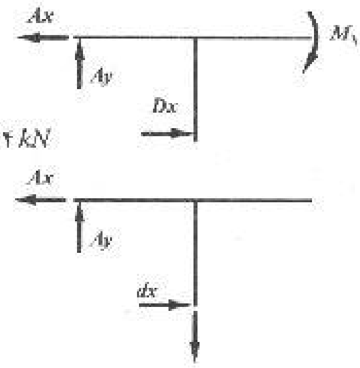
$$\delta_5 = \int_0^a \frac{P(2a + x)^2}{EI} dx = \frac{P}{3EI} (2a + x)^3 \Big|_0^a = \frac{19}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\delta = \sum \delta_i = \frac{21Pa^3}{2EI}$$

۱۳-۳۴. با استفاده از روش مجازی، تغییر مکان قائم نقطهٔ D و شیب نقطهٔ A را در اثر لنگر $M1$ مساوی ۱۲۰۰ کیلو نیوتن متر به دست آورید. EI برای تمام اعضاء ثابت می‌باشد. فقط اثر تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



مسئله ۱۳-۳۴



$$\sum M_A = 0 \circlearrowright + \; : D_x(2/7) = M_1 \Rightarrow D_x = \frac{1200}{2/7} = 444/4\,kN$$

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x = 444/4\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y = 0$$

برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه D بار واحد قائم را در نقطه D وارد می‌کنیم.

$$\sum M_A = 0 \circlearrowright + \; : d_x\,(2/7) - 1(3) = 0 \Rightarrow d_x = 1/11\,kN$$

$$\sum F_x = 0 : \quad a_x = 1/11\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : \quad a_y = 1\,kN$$

$$BD : M = 444/4 \times 10^3\, y\ (N.m) \quad , \quad m = 1011 (N.m)$$

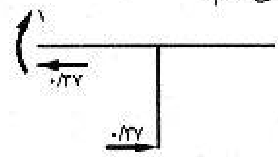
$$BA : M = 0$$

$$BC : M = -1200 \times 10^3\ (N.m) \quad , \quad m = 0$$

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2/7} (444/4 \times 10^3 y)\,(1011) dy = \frac{493/3 \times 10^3}{EI} \int_0^{2/7} y^2 dy$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{3237 \times 10^3}{EI}$$

که در آن I بر حسب m^4 و E بر حسب N/m^2 می‌باشند برای محاسبه دوران A یک ممان واحد در نقطه A اعمال می‌کنیم:



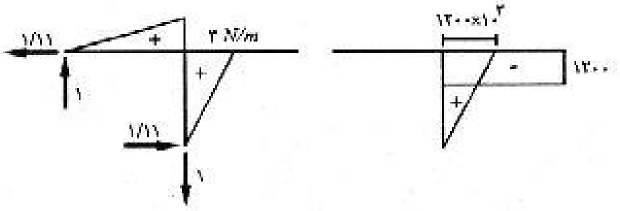
$$AB : M = ۰ \;,\; BC : m = ۰$$

$$DB : M = ۴۴۴/۴ \times ۱۰^۳ y \;,\; m = ۰/۳۷y$$

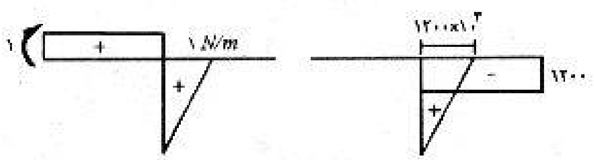
$$\theta = \frac{۱}{EI}\int_۰^{۲/۷} (۴۴۴/۴ \times ۱۰^۳ y)\,(۰/۳۷y)dy = \frac{۱۶۴/۴}{EI}\int_۰^{۲/۷} y^۲dy \Rightarrow \theta = \frac{۱۰۷۸/۶ \times ۱۰^۳}{EI}$$

روش ترسیمی :

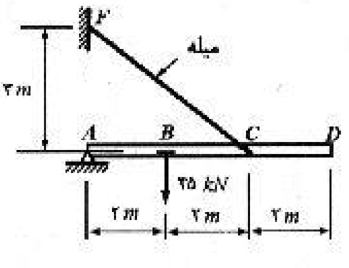
$$\delta = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۲/۷}{۳}\,(۱۲۰۰\times۱۰^۳)\,(۳)\right] = \frac{۳۲۴۰\times۱۰^۳}{EI}$$



$$\delta = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۲/۷}{۳}\,(۱۲۰۰ \times ۱۰^۳)\,(۱)\right] = \frac{۱۰۸۰ \times ۱۰^۳}{EI}$$



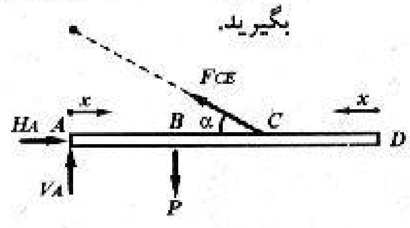
۱۳-۳۵. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم نقطهٔ D از سازهٔ نشان داده شده در شکل را در اثر بار متمرکز ۴۸ کیلونیوتنی به دست آورید. هم اثر تغییر شکلهای خمشی و هم اثر تغییر شکلهای محوری را در نظر بگیرید. سطح مقطع میله مساوی ۵۰۰ میلیمترمربع و سطح مقطع تیر مساوی ۴۰۰۰ میلیمترمربع و لنگر ماند آن مساوی ۲۰×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلیمترمربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۲-۳۵

$$\sum M_A = ۰ : \; F_{CE} \,.\, Sin\alpha \times ۴ - P \times ۲ = ۰$$

$$sin\alpha = \frac{۳}{۵} \to F_{CE} = \frac{۵P}{۶} = ۴۰\ kN$$



$$\sum F_y = ۰ : \quad V_A = P - F_{CE} \cdot sin\alpha = \frac{P}{۲} = ۲۴\,kN$$

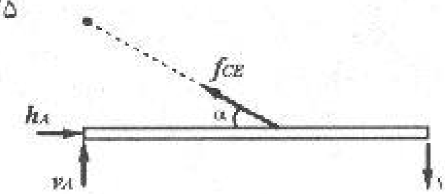
$$\sum F_x = ۰ : \quad H_A = F_{CE} \cdot cos\alpha = \frac{۲P}{۳} = ۳۲\,kN$$

$$AB : \begin{cases} N = -H_A = -\frac{۲P}{۳} \\ M = R_A x = \frac{P}{۲}x \end{cases} \qquad BC : \begin{cases} N = -F_{CE}\cos\alpha = -\frac{۲P}{۳} \\ M = F_{CE}\sin\alpha \,.\, x = \frac{P}{۲}x \end{cases} \qquad CD : \begin{cases} N = ۰ \\ M = ۰ \end{cases}$$

$$\sum M_A = ۰ : f_{CE} \,.\, Sin\alpha \times ۴ = ۱ \times ۶ \Rightarrow f_{CE} = ۲/۵$$

$$\sum F_y = ۰ : \quad v_A = ۱ - f_{CE}\, Sin\alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$\sum F_x = ۰ : \quad h_A = f_{CE}\, cos\alpha = ۲$$



$$AB : \begin{cases} n = -h_A = -۲ \\ m = v_A x = -\frac{۱}{۲}x \end{cases} \qquad BC : \begin{cases} n = -۲ \\ m = -۱(x+۲) + f_{CE}\sin\alpha \,.\, x = \frac{۱}{۲}x - ۲ \end{cases}$$

$$CD : \begin{cases} n = ۰ \\ m = -x \end{cases}$$

$$\delta_D = \int \frac{Mmdx}{EI} + \sum \frac{NnL}{EA}$$

$$\int \frac{Mmdx}{EI} = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^۲ \left(\frac{P}{۲}x\right)\left(-\frac{۱}{۲}x\right)dx + \int_۰^۲ \left(\frac{P}{۲}x\right)\left(\frac{۱}{۲}x - ۲\right)dx\right] = \frac{۱}{EI}$$

$$\left[-\frac{P}{۱۲}x^۳ \Big|_۰^۲ + \left(\frac{P}{۱۲}x^۳ - \frac{P}{۲}x^۲\right)\Big|_۰^۲\right] = -\frac{۲P}{EI}$$

$$\sum \frac{NnL}{EA} = \frac{۱}{EA_b}\left[\left(-\frac{۲P}{۳}\right)(-۲)(۲) + \left(-\frac{۲P}{۳}\right)(-۲)(۲)\right] + \frac{۱}{EA_m}\left[\left(\frac{۵P}{۶}\right)\left(\frac{۵P}{۲}\right)(۵)\right]$$

$$= \frac{۱۶P}{۳EA_b} + \frac{۱۲۵P}{۱۲EA_m}$$

$$EI = ۱۴ \times ۱۰^{۱۱} = ۱۴ \times ۱۰^۵\, N.m^۲ \qquad EA_b = ۲۸۰۰ \times ۱۰^۵ \qquad EA_m = ۳۵۰ \times ۱۰^۵$$

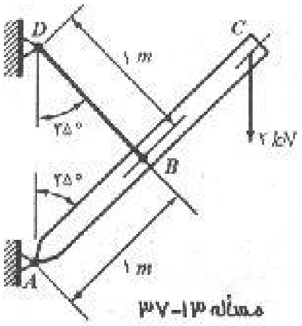
$$\delta_D = \left(-\frac{۲}{۱۴} + \frac{۱۶}{۳ \times ۲۸۰۰} + \frac{۱۲۵}{۱۲ \times ۳۵۰}\right) \times ۱۰^{-۵} \times P = (-۰/۱۱۱۱۹) \times ۱۰^{-۵} \times ۴۸۰۰۰$$

$$= -۰/۰۵۳m \qquad \Rightarrow \delta_D = -۵۳mm$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تغییر مکان نقطه D به‌سمت بالا می‌باشد.

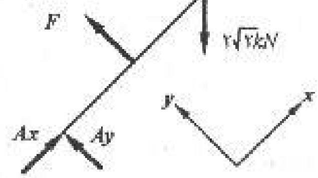
۱۳-۳۶. در مسأله قبل این طور تعیین شد که در اثر اعمال بار متمرکز ۴۸ کیلو نیوتنی، نقطهٔ D به اندازهٔ ۵۲/۹ میلیمتر به سمت بالا حرکت می‌کند. اگر بدون حذف بار متمرکز ۴۸ کیلونیوتنی، بخواهیم نقطهٔ D به وضعیت اولیهٔ خود برگردد، طول میلهٔ CF را چقدر باید تغییر دهیم. این تغییر طول را می‌توانیم توسط یک بست قورباغه‌ای انجام دهیم.

$$۱ \times \Delta_D = \sum \bar{f}.L \Rightarrow ۱ \times ۵۳ = ۴۰ \times ۱۰^{۳} \times \Delta L \Rightarrow \Delta L = ۱/۳۲۵ \times ۱۰^{-۳}\ mm$$



مسأله ۱۳-۳۷

۱۳-۳۷. یک میلهٔ فولادی مورب به طول ۲ متر و سطح مقطع ۴۰۰۰ میلیمتر مربع و لنگر ماند $۸/۵۳ \times ۱۰^{۶}$ میلیمتر به توان ۴، مطابق شکل تکیه داده شده است. سطح مقطع آویز فولادی BD مساوی ۶۰۰ میلیمتر مربع می‌باشد. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم نقطه C را در اثر اعمال بار متمرکز $۲\sqrt{۲}$ کیلونیوتنی به دست آورید. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.

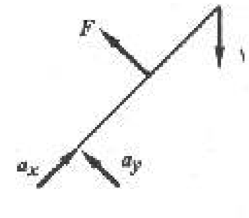


$$\sum M_A = ۰ \circlearrowleft + : F_{BD} \times ۱ - ۲\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(۲) = ۰ \Rightarrow F_{BD} = ۴kN$$

$$\sum F_x = ۰ : A_x - ۲\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(۲) = ۰ \Rightarrow A_x = ۲kN$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y + ۲\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(۲) = ۰ \Rightarrow A_y = -۲kN$$

بار واحد را در جهت قائم اعمال نموده و نیروهای به‌وجود آمده را به‌دست می‌آوریم:

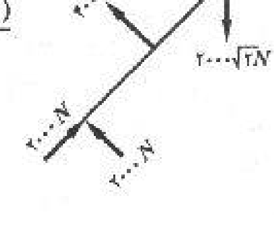


$$\sum M_A = ۰ : f \times ۱ - ۱\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\sqrt{۲}) = ۰ \Rightarrow f = \sqrt{۲}N$$

$$\sum F_x = ۰ : a_x - (۱)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a_x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}N$$

$$\sum F_y = ۰ : a_y + \sqrt{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow a_y = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}N$$

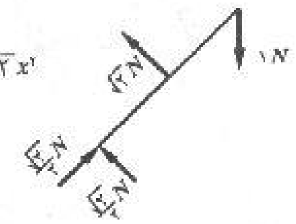
تغییر مکان در اثر نیروهای محوری:



$$\delta_f = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(-۲۰۰۰)\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(۲۰۰۰)}{(۴۰۰۰)(۲ \times ۱۰^{۵})} + \frac{(۴۰۰۰)(\sqrt{۲})(۱۰۰۰)}{(۶۰۰)(۲ \times ۱۰^{۵})}$$

$$= ۰/۰۵۰۷ mm$$

تغییر مکان در اثر ممانهای خمشی:



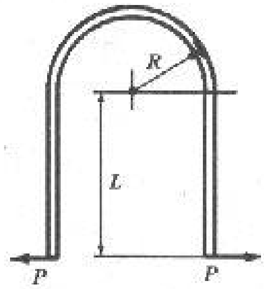
$$\delta_b = \int \frac{Mm\,dx}{EI}$$

$$۰ < x < ۱ : M = -۲۰۰۰x \quad \text{و} \quad m = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}x \Rightarrow Mm = ۱۰۰۰\sqrt{۲}\,x^۲$$

$$\delta_b = ۲\int_۰^{۱۰۰۰} \frac{۱۰۰۰\sqrt{۲}\,x^۲}{EI}\,dx = ۰/۵۵۲۶$$

$$\delta = \delta_f + \delta_b = ۰/۰۵۰۷ + ۰/۵۵۲۶ = ۰/۶۰۳۳\,mm$$

۱۳-۳۸. با استفاده از روش کار مجازی و در نظر گرفتن فقط اثر تغییر شکلهای خمشی، محاسبه نمایید که در قاب نشان داده شده در شکل زیر دو نیروی P چقدر از یکدیگر دور می‌شوند. EI در کل قاب ثابت می‌باشد. (راهنمایی: به منظور سهولت از تقارن جسم استفاده نمایید).



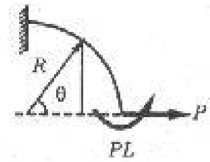
مسأله ۱۳-۳۸

ابتدا تغییر مکان یک نیمه جسم را حساب می‌کنیم.

$$(۱) : M = Px \quad \text{و} \quad m = x \rightarrow Mm = Px^۲$$

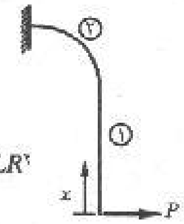
$$(۲) : M = PL + PR\,Sin\,\theta \qquad m = L + R\,Sin\,\theta$$

$$Mm = PL^۲ + ۲PLR\,Sin\,\theta + PR^۲\,sin^۲\,\theta$$



$$\delta_۱ = \int_۰^L \frac{Px^۲}{EI}\,dx = \frac{PL^۳}{۳EI}$$

$$\delta_۲ = \frac{۱}{EI}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (PL^۲ + ۲PLR\,Sin\,\theta + PR^۲\,Sin^۲\,\theta)\,Rd\theta$$



$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} PL^۲Rd\theta = PL^۲R\left(\frac{\pi}{۲}\right)$$

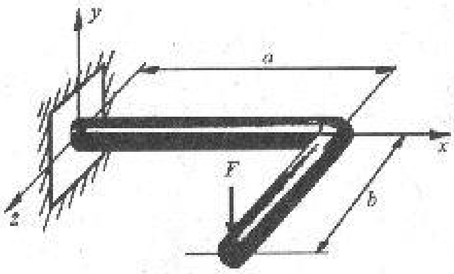
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۲PLR^۲\,sin\,\theta d\theta = ۲PLR^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin\,\theta d\theta = ۲PLR^۲\left(cos\,\theta\,\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right) = ۲PLR^۲$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} PR^۳\,sin^۲\theta\,d\theta = PR^۳\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{۱ - cos^۲\theta}{۲}\right)d\theta = \frac{PR^۳}{۲}\left[\theta - \frac{sin^۲\theta}{۲}\right]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = PR^۳\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

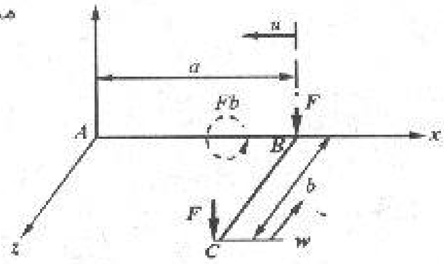
مجموع تغییر مکانهای فوق تغییر مکان یک طرف قطعه می‌باشد پس تغییر مکان کل دو برابر مقدار مذکور می‌باشد.

$$\delta = \frac{۲}{EI}\left[\frac{PL^۳}{۳} + PL^۲R\frac{\pi}{۲} + ۲PLR^۲ + PR^۳\frac{\pi}{۴}\right]$$

۱۳-۳۹. یک خم ۹۰ درجه با مقطع دایره شکل توپر که در یک انتها گیردار شده و در انتهای آزاد تحت بار متمرکز F می‌باشد، مطابق شکل مفروض است. نیروی F عمود بر صفحهٔ خم می‌باشد. مطلوب است تعیین (الف) تغییر مکان انتهای آزاد در امتداد محورهای مختصات (ب) دوران انتهای آزاد در امتداد محورهای مختصات. ثابت‌های E، G، I و I_p را معلوم فرض کنید.



مسأله ۱۳-۳۹

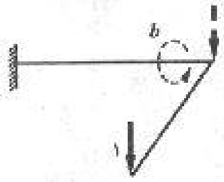


$\underline{AB}: M = -Fw$ و $m = -w$

$$\delta_{1y} = \int_0^b \frac{Fu^2}{EI}\,dw = \frac{Fb^3}{3EI}$$

$\underline{BC}: M = -Fu$ و $m = -u \rightarrow Mm = Fu^2$

$T = Fb$ و $t = b \rightarrow Tt = Fb^2$



$$\delta_2 y = \int_0^a \frac{Fu^2}{EI}\,du + \int_0^a \frac{Fb^2}{GJ}\,du = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fab^2}{GJ}$$

$$\delta y = \delta_{1y} + \sigma_{2y} = \frac{F(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Fab^2}{GJ}$$

توجه به این نکته که نیرو و تغییر مکان عمود بر هم کار انجام نمی‌دهند بسیار مهم است.

برای به‌دست آوردن تغییر مکان در جهت x یک بار واحد در جهت x اعمال می‌کنیم:

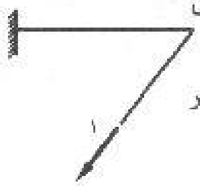
در قسمت BC چون ممان خمشی حاصل از F و ممان خمشی ناشی از بار واحد بر یکدیگر عمود می‌باشند حاصل‌ضرب آنها صفر می‌شود.

در قسمت AB نیروی محوری ناشی از بار واحد وجود داشته امّا نیروی محوری ناشی از بار F وجود ندارد ($N = 0$) بنابراین:

$$\int \frac{Nn}{EI}\,dx = 0$$

همچنین در این قسمت از جسم ممان خمشی ناشی از بار F و ممان خمشی ناشی از بار واحد بر یکدیگر عمود بوده و در نتیجه تغییر مکان صفر می‌باشد.

بنابر مطالب فوق نتیجه می‌شود که در راستای x تغییر مکانی رخ نمی‌دهد.



برای به دست آوردن تغییر مکان در جهت z یک بار واحد در جهت z اعمال می‌کنیم.
به دلیل عمود بودن نیروها و گشتاورهای ناشی از بار F و بار واحد تغییر مکان در جهت z هم صفر است.
برای محاسبه دوران انتهای آزاد، یک ممان واحد در محل قرار می‌دهیم.

$AB : M = -Fw$ و $m = 1$

$$\theta_1 = \int_0^b \frac{-Fw}{EI}\,dw = \frac{-Fw^2}{2EI}\Big|_0^b = -\frac{Fb^2}{2EI}$$

$BC : M = -Fu$ و $m = 0$

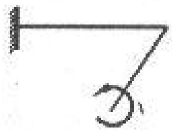
$T = Fb$ و $t = -1$

$$\theta_2 = \int_0^b \frac{-Fb}{GJ} = \frac{-Fab}{GJ}$$

بنابراین کل زاویه پیچش حول محور x عبارت است از:

$$\theta_x = -\left(\frac{Fb^2}{2EI} + \frac{Fab}{GJ}\right)$$

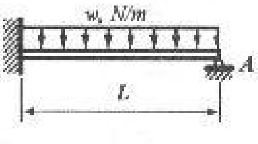
برای محاسبه دوران حول محور z یک ممان واحد حول z در محل مورد نظر قرار می‌دهیم:



$AB : M = -F.u$ $m = 1$

$BC : M = -F.w$ $m = 0$

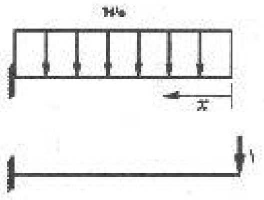
$$\theta_z = \int_0^a \frac{(-Fu)(1)}{EI}\,du = \frac{-F}{EI}\int_0^a u\,du = -\frac{Fa^2}{2EI}$$



مسأله ۱۳-۴۰

۱۳-۴۰. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه‌های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکلها، واکنش A از تیر نامعین نشان داده شده در شکل را به‌دست آورید.

ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه A وجود ندارد و در این حالت تغییر مکان را از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم:



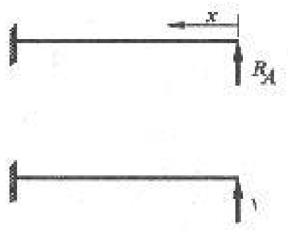
$$M = -w_0 x\frac{x}{2} = -\frac{w_0 x^2}{2} \quad \text{و} \quad m = -x$$

$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{w_0 x^3}{2}\,dx = \frac{w_0 x^4}{8EI}\Big|_0^L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{w_0 L^4}{8EI}$$

سپس اثر تکیه‌گاه A را به‌صورت نیروی R_A اعمال کرده و تغییر مکان ناشی از آنرا به‌روش کار مجازی به‌دست می‌آوریم:

$$M = R_A x \quad m = 1 \times x = x$$

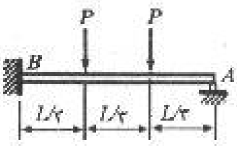


$$\delta' = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx = \int^L \frac{(R_A x)(x)}{EI}\,dx$$

$$= \frac{R_A}{EI} \int_0^L x^2 dx \Rightarrow \delta' = \frac{R_A L^3}{3EI}$$

$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{w_0 L^4}{8EI} = \frac{R_A L^3}{3EI} \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} w_0 L$$

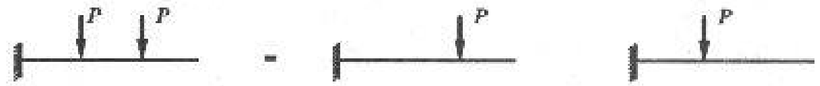
۱۳-۴۱. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه‌های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبهٔ تغییر شکلها، یکبار واکنش قائم نقطهٔ A را اضافی در نظر بگیرید و آن را تعیین کنید و یکبار دیگر نقطهٔ B را اضافی در نظر بگیرید و آن را تعیین نمایید.



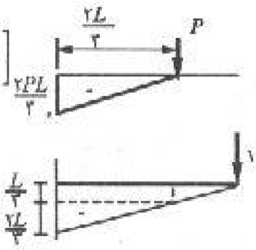
مسئله ۱۳-۴۱

الف)

ابتدا فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه A وجود ندارد و با روش کار مجازی تغییر مکان نقطه A را به دست می‌آوریم و در این مسیر از روشهای ترسیمی و سوپر پوزیشن (جمع آثار) استفاده می‌کنیم:

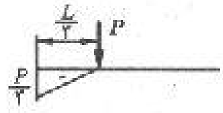


$$\delta_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2L}{3}\right)\left(-\frac{2PL}{3}\right)\left(-\frac{L}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)\left(-\frac{2PL}{3}\right)\left(-\frac{2L}{3}\right)\right]$$



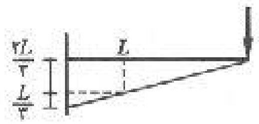
$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{14}{81} \times \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{-PL}{3}\right)\left(\frac{-2L}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{-PL}{3}\right)\left(-\frac{L}{3}\right)\right]$$

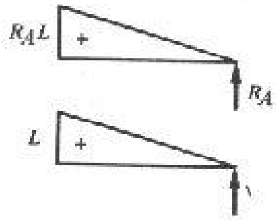


$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{4}{81} \times \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{2}{9}\frac{PL^3}{EI}$$ (به طرف پایین)



اکنون واکنش مجهول R_A را به انتهای تیر وارد کرده و به‌روش کار مجازی تغییر مکان آنرا به‌دست می‌آوریم:



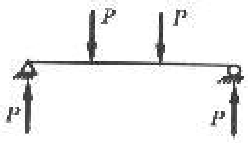
$$\delta' = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(L)\, R_AL\, (L)\right] = \frac{R_AL^3}{3EI} \quad \text{(به طرف بالا)}$$

امّا بدیهی است که تغییر مکان نقطه A در مجموع باید صفر باشد پس:

$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{2}{9}\frac{PL^3}{EI} = \frac{R_AL^3}{3EI} \Rightarrow R_A = \frac{2}{3}P$$

ب) این بار ممان M_B را به‌عنوان واکنش اضافی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که وجود ندارد. در این حالت زاویه دوران نقطه B را به‌روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم:

$$0 \le x \le \frac{L}{3} \;:\quad M = Px$$



$$\frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3} : M = Px - P\left(x - \frac{L}{3}\right) = P\,\frac{L}{3}$$

$$\frac{2L}{3} \le x \le L : M = Px - P\left(x - \frac{L}{3}\right) - P\left(x - \frac{2L}{3}\right) = -Px + PL$$

$$m = -\frac{x}{L} + 1$$ برای هر سه ناحیه :

$$\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\frac{L}{3}} (Px)\left(-\frac{x}{L} + 1\right)dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left(\frac{PL}{3}\right)\left(-\frac{x}{L} + 1\right)dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{2L}{3}}^{L} (-Px + PL)\left(-\frac{x}{L} + 1\right)dx\right]$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{Px^3}{3L} + \frac{Px^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{L}{3}} + \left(-\frac{Px^2}{6} + \frac{PL}{3}x\right)\Big|_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} + \left(-\frac{Px^3}{3L} - Px^2 + PLx\right)\Big|_{\frac{2L}{3}}^{L}\right]$$

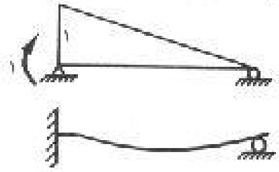
$$\Rightarrow \theta = \frac{PL^2}{9EI}$$

اینک ممان M_B را به نقطهٔ B وارد کرده و به‌روش کار مجازی زاویه دوران نقطه B را در اثر این ممان به‌دست می‌آوریم (روش ترسیمی)

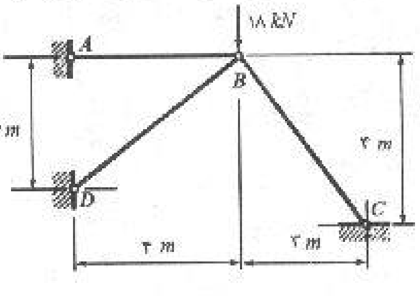
$$\theta' = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{3}(M_B)(1)\right] = \frac{M_BL}{3EI}$$

اما می‌دانیم که در نقطه B زاویه دوران باید صفر باشد بنابراین:

$$\theta + \theta' = 0 \rightarrow \frac{PL^2}{9EI} + \frac{M_BL}{3EI} = 0 \Rightarrow M_B = \frac{-PL}{3}$$

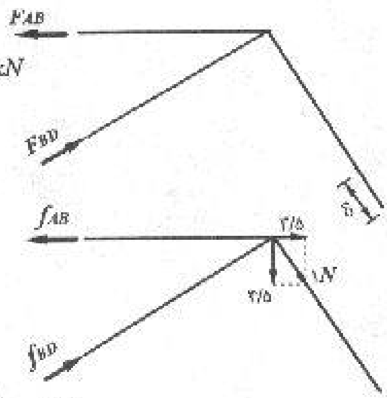


۴۲-۱۳. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه‌های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبهٔ تغییر شکلها، نیروهای داخلی اعضای AB، BD و BC از سازهٔ نامعین نشان داده شده در شکل را محاسبه نمایید، میلهٔ BC را به عنوان میلهٔ اضافی در نظر بگیرید L/A عضو AB را مساوی ۱، عضو DB را مساوی ۲ و عضو CB را مساوی ۳ فرض کنید. از کمانش اعضاء صرف نظر نمایید.



مسأله ۱۳-۴۲

با جدا کردن میله BC سازه از حالت نامعین به حالت معین تبدیل می‌شود.



$$\sum M_D = ۰ \circlearrowleft + \; : F_{AB} \times ۳ - ۱۸ \times ۴ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۲۴\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ : (F_{BD})_x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (F_{BD})_x = ۲۴\,kN$$

$$F_{BD} = \frac{۵}{۴} \times ۲۴ = ۳۰\,kN$$

با روشی مشابه:

$$f_{AB} = ۱/۶۷N \quad و \quad f_{BD} = ۱/۳۳N$$

$$\left(\frac{L}{A}\right)_{AB} = ۱ \quad و \quad \left(\frac{L}{A}\right)_{BD} = ۲ \quad و \quad \left(\frac{L}{A}\right)_{BC} = ۳$$

$$\delta = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{(۲۴۰۰۰)(۱/۶۷)}{E} \times ۱ + \frac{(-۳۰۰۰۰)(-۱/۳۳)}{E} \times ۲ = \frac{۱۱۹۸۸۰}{E}$$

اکنون نیروی میله BC را به سازه اعمال می‌کنیم و با توجه به این نکته که تغییر مکان C باید صفر باشد نیروی وارد بر میله C قابل محاسبه خواهد بود.

$$\delta' = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{(۱/۶۷F)(۱/۶۷)}{E} \times ۱ + \frac{(-۱/۳۳F)(-۱/۳۳)}{E} \times ۲ + \frac{(F)(۱)}{E} \times ۳$$

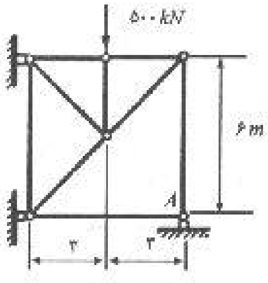
$$\Rightarrow \delta' = \frac{۹/۳۲۷}{E} F$$

$$\delta + \delta' = ۰ \Rightarrow \frac{۱۱۹۸۸۰}{E} + \frac{۹/۳۲۷}{E} \times F = ۰ \Rightarrow F = -۱۲/۸۵\,kN$$

$$F_{AB} = ۲۴ + ۱/۶۷\,(-۱۲/۸۵) = ۲/۵۴\,kN$$

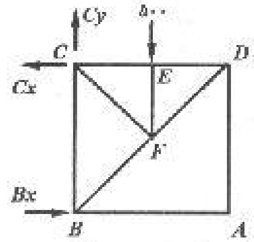
$$F_{BD} = -۳۰ - ۱/۳۳(-۱۲/۸۵) = -۱۲/۹\,kN$$

۱۳-۴۳. واکنش نقطهٔ A از خرپای نشان داده شده در شکل را محاسبه نمایید. کلیه اعضای خرپا از مصالح کاملاً ارتجاعی ساخته شده‌اند و L/A اعضای آن مساوی ۰/۰۵ میلیمتر به توان منهای یک می‌باشد. از روش کار مجازی استفاده نمایید.



مسأله ۱۳-۴۳

ابتدا فرض می‌کنیم که نقطه A آزاد بوده و تکیه‌گاه وجود ندارد و با این فرض تغییر مکان قائم نقطه A را به دست می‌آوریم.



$$\sum M_C = ۰ \circlearrowleft + : C_x(۶) - ۵۰۰\,(۳) = ۰ \Rightarrow C_x = ۲۵۰\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ \qquad : B_x = ۲۵۰\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ \qquad : C_x = ۵۰۰\,kN$$

در ادامه با استفاده از روش گره نیروهای مربوط به اعضاء سازه را به دست می‌آوریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۰ \quad \text{و} \quad \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AD} = ۰$$

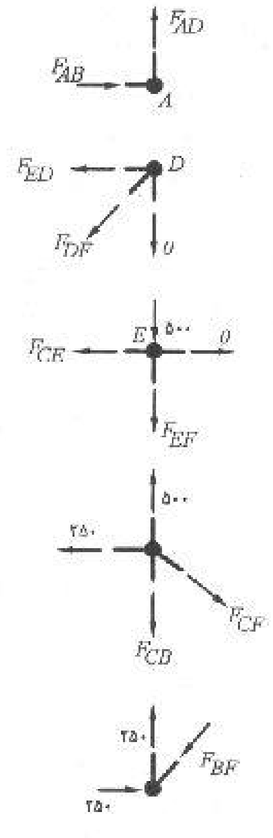
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{DF} = ۰ \quad \text{و} \quad \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{ED} = ۰$$

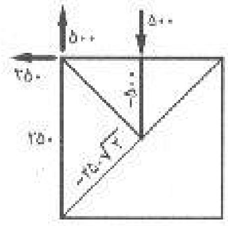
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{CE} = ۰ \quad \text{و} \quad \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{EF} = ۵۰۰\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ : F_{CF}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - ۲۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{CF} = ۲۵۰\sqrt{۲}\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ : F_{CB} + F_{CF}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۵۰۰ \Rightarrow F_{CB} = ۲۵۰\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BF} = ۲۵۰\sqrt{۲}$$



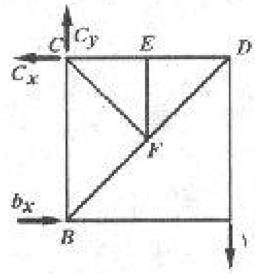


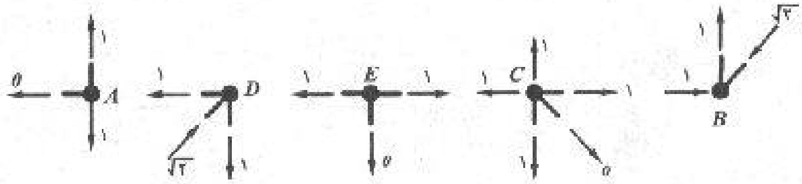
حال که نیروهای داخلی اعضاء مشخص شدند بار واحد مجازی را به نقطه A اعمال می‌کنیم و نیروهای داخلی را که در اثر آن به وجود می‌آیند محاسبه می‌کنیم.

$$\sum M_C = ۰ \circlearrowright + : b_x(۶) - ۱(۶) = ۰ \rightarrow b_x = ۱$$

$$\sum F_x = ۰ : \quad C_x = ۱$$

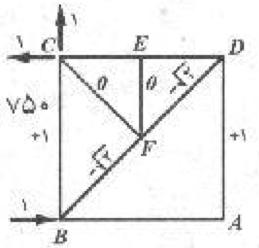
$$\sum F_y = ۰ : \quad C_y = ۱$$



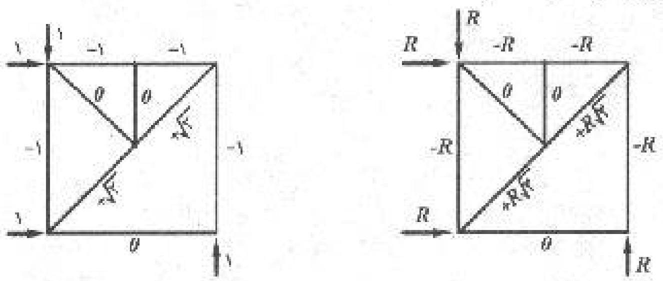


$$\delta = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{L}{A}E\left[(۲۵۰)(۱) + (-۲۵۰\sqrt{۲})(-\sqrt{۲})\right] = \frac{۰/۰۵}{E} \times ۷۵۰$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{۳۷/۵}{E}$$



اکنون نیروی مجهول R را به نقطه A اعمال نموده، با روش کار مجازی تغییر مکان ناشی از آن‌را بر حسب R به‌دست می‌آوریم، سپس با مساوی قرار دادن این تغییر مکان با تغییر مکان به‌دست آمده در قسمت قبل، نیروی R به دست خواهد آمد.

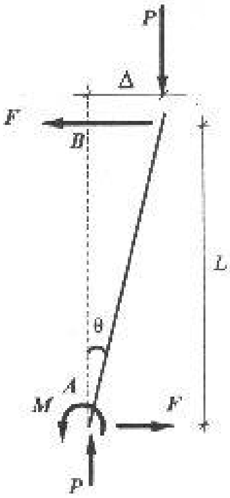


$$\delta' = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{L}{AE}\Big[(-R)(-۱) + (R\sqrt{۲})(\sqrt{۲}) + (-R)(-۱)$$
$$+ (-R)(-۱) + (-R)(-۱) + (R\sqrt{۲})(\sqrt{۲})\Big]$$
$$= \frac{L}{AE}(۸R) = \frac{۰/۰۵ \times ۸}{E} R \Rightarrow \delta' = \frac{۰/۴R}{E}$$

$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{۳۷/۵}{E} = \frac{۰/۴R}{E} \Rightarrow R = ۹۳/۷۵\, kN$$

مسائل فصل چهاردهم

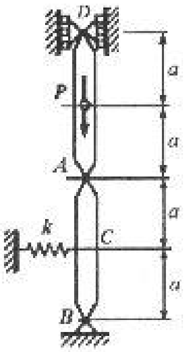
۱۴-۱. یک میلهٔ صلب توسط دو فنر در وضعیت قائم نشان داده شده در شکل، ثابت نگاه داشته شده‌است. فنر فوقانی یک فنر معمولی با ثابت فنر K_1 نیوتن بر متر و فنر تحتانی یک فنر پیچی با ثابت فنر K_2 نیوتن متر بر رادیان می‌باشد. بار بحرانی کمانش برای این مجموعه را محاسبه نمایید.



مسأله ۱۴-۱

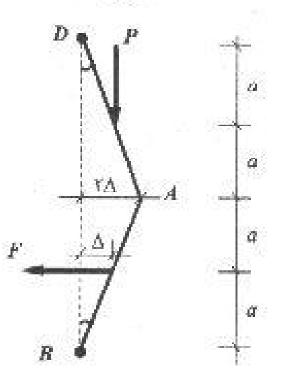
فرض می‌کنیم نقطهٔ B به اندازهٔ Δ به سمت راست حرکت داده شود و میله، زاویهٔ کوچک θ را با قائم بسازد. بنابراین سیستم نیروهای مؤثر بر این میله از دو کوپل ناشی می‌شود، یکی کوپل ناشی از نیروی خارجی P که تمایل به دور کردن میله از وضعیت تعادل را دارد و دیگری کوپل ناشی از نیروی فنر معمولی (F) و فنر پیچشی (M) که تمایل به برگرداندن میله به وضعیت اولیه را دارند، بنابراین در وضعیت بحرانی داریم:

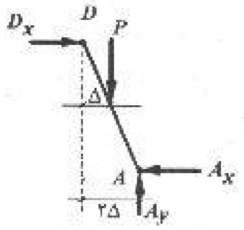
$$\left.\begin{aligned} &P_{cr}\,\Delta = M + FL \\ &M = K_2\theta = K_2\frac{\Delta}{L} \Rightarrow P_{cr}\Delta = K_2\frac{\Delta}{L} + K_1\,\Delta L \\ &F = K_1\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{1}{L}\left(K_1 L^2 + K_2\right)}$$

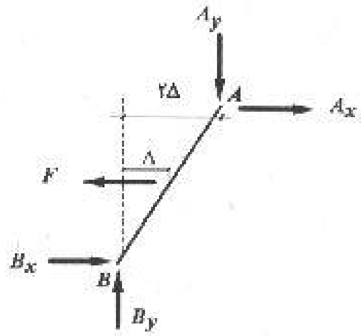


۱۴-۲. مطابق شکل، دو میلهٔ صلب با طول مساوی در نقطهٔ A به یکدیگر مفصل و در نقاط D و B تکیه داده شده‌اند. در نقطه C فنری با ثابت K نیوتن بر متر به میلهٔ تحتانی متصل شده است. مطلوب است تعیین بار بحرانی برای این مجموعه.

مسأله ۱۴-۲







همانند مسأله (۱۴-۱) فرض می‌کنیم نقطه A به اندازهٔ 2Δ به سمت راست حرکت داده شود و میله‌های AB و AD زاویهٔ کوچک θ را با قائم بسازند.
از ترسیمهٔ آزاد میلهٔ AD خواهیم داشت:

$$A_y = P \quad , \quad A_x = D_x = \frac{P\Delta}{2a}$$

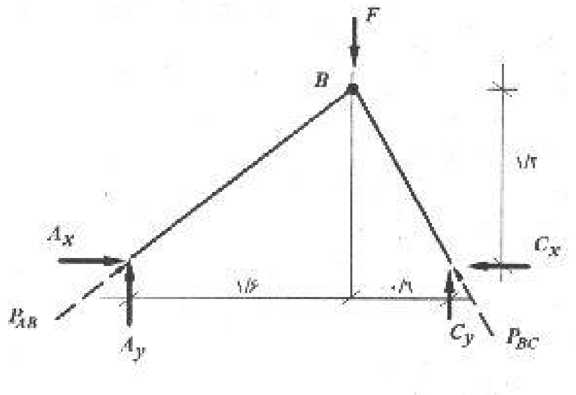
با توجه به ترسیمه آزاد میلهٔ AB، سیستم نیروهای مؤثر بر این میله نیز از دو کوپل ناشی می‌شود، یکی کوپل ناشی از نیروی A_y و A_x که تمایل به دور کردن میله از وضعیت تعادل را دارند و دیگری کوپل ناشی از نیروی فنر (F) که تمایل به برگرداندن میله به وضعیت اولیه را دارد. بنابراین در وضعیت بحرانی خواهیم داشت،

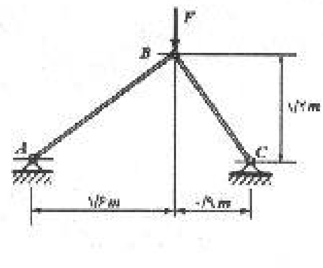
$$F.a = A_y(2\Delta) + A_x(2.a)$$

$$F = K\Delta \qquad \Rightarrow K.\Delta.a = P_{cr}(2\Delta) + \frac{P_{cr}\Delta}{2a}(2a)$$

$$\Rightarrow 3P_{Cr} = K.a \quad \Rightarrow \boxed{P_{Cr} = K.\frac{a}{3}}$$

۱۴-۳. مجموعه مفصلی نشان داده شده در شکل که اعضای آن از آلیاژهای آلمینیومی ساخته شده‌اند، مفروض می‌باشد. با فرض اینکه نقط در صفحهٔ قاب امکان کمانش باشد، مقدار نیروی F را که باعث ناپایداری ارتجاعی سازه می‌شود، به دست آورید. از رابطهٔ اولر به عنوان معیار کمانش اعضاء استفاده کنید و E را مساوی $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.





مسأله ۱۴-۳

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad \Rightarrow C_y(۲/۵) - F(۱/۶) \quad \Rightarrow C_y = ۰/۶۴F \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + C_y - F = ۰ \quad \Rightarrow A_y = ۰/۳۶F \uparrow$$

قطعهٔ AB:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \quad \Rightarrow A_x(۱/۲) - A_y(۱/۶) = ۰ \Rightarrow A_x = ۰/۴۸F \rightarrow$$

کل سیستم: $\overset{+}{\overrightarrow{\sum}} F_x = ۰ \Rightarrow A_x - C_x = ۰ \Rightarrow C_x = ۰/۴۸F \leftarrow$

$$\therefore P_{AB} = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} \quad \Rightarrow \quad P_{AB} = ۰/۶F,$$

$$P_{cr_{AB}} = \frac{\pi^۲ EI}{L_e^۲} = \frac{\pi^۲(۰/۷ \times ۱۰^۵)\left(\frac{۵۰^۴}{۱۲}\right)}{۲۰۰۰^۲} \times ۱۰^{-۳} = ۹۰\,kN$$

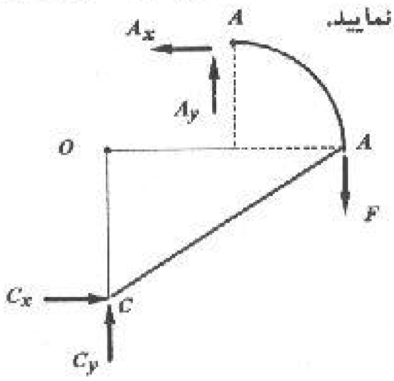
$$P_{BC} = \sqrt{C_x^۲ + C_y^۲} \quad \Rightarrow \quad P_{BC} = ۰/۸F,$$

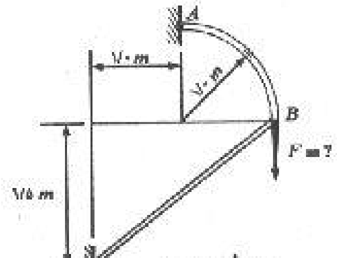
$$P_{cr_{BC}} = \frac{\pi^۲ EI}{L_e^۲} = \frac{\pi^۲(۰/۷ \times ۱۰^۵)\left(\frac{۵۰^۴}{۱۲}\right)}{۱۵۰۰^۲} \times ۱۰^{-۳} = ۱۶۰\,kN$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰/۶F = ۹۰ \Rightarrow F = ۱۵۰\,kN \\ ۰/۸F = ۱۶۰ \Rightarrow F = ۲۰۰\,kN \end{cases} \Rightarrow F_{max} = min\,F = ۱۵۰\,kN$$

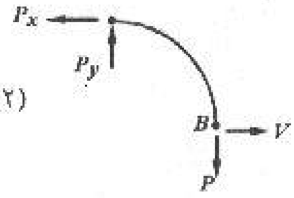
(شایان ذکر است که اعضاء همانند ستون دو سر مفصل می‌باشند.)

۴-۱۴. سازهٔ نشان داده شده در شکل که از عضو منحنی AB و عضو مستقیم BC تشکیل یافته است، مفروض می‌باشد. اگر عضو BC از جنس چوب و به مقطع ۸۰ × ۴۰ میلیمتر باشد، حداکثر مقدار نیروی F چقدر می‌تواند باشد؟ تمام اتصالات را مفصلی فرض نموده و از وزن اعضاء صرف نظر نمایید. از رابطه اولر با ضریب اطمینان ۳ استفاده کنید و ضریب ارتجاعی چوب را مساوی $۰/۱۱ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.





مسأله ۴-۱۴



$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = ۰ \Rightarrow A_x(۱) - A_y(۱) = ۰ \Rightarrow A_x = A_y$ ، عضو AB

$\circlearrowleft^{+} \sum M_o = ۰ \Rightarrow A_x(۱) + A_y(۱) + C_x(۱/۵) = F(۲)$ ، کل سیستم

$$۱/۵C_x + ۲A_x = ۲F$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow C_x = A_x$$

$$\therefore ۱/۵C_x + ۲C_x = ۲F \Rightarrow C_x = \frac{۲}{۳/۵}F = A_x = A_y$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow C_y + A_y = F \Rightarrow C_y = F - \frac{۲}{۳/۵}F \Rightarrow C_y = \frac{۱/۵F}{۳/۵}$$

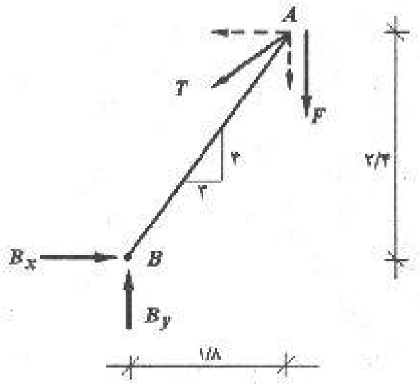
$$P_{BC} = \sqrt{C_x^۲ + C_y^۲} = \sqrt{\left(\frac{۲}{۳/۵}F\right)^۲ + \left(\frac{۱/۵}{۳/۵}F\right)^۲} = ۰/۷۱F$$

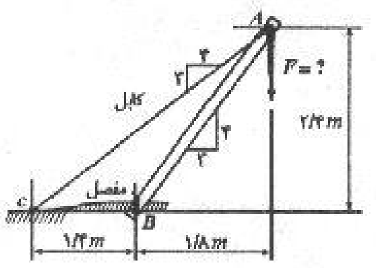
$$I_{min} = ۸۰ \times \frac{۴۰^۳}{۱۲} = ۴/۲۷ \times ۱۰^۵ mm^۴ \quad ، \quad L_{BC} = \sqrt{۲^۲ + ۱/۵^۲} = ۲/۵m$$

$$P_{all} = \frac{\pi^۲EI}{F.SL_e^۲} = \frac{\pi^۲(۰/۱۱ \times ۱۰^۵)(۴/۲۷ \times ۱۰^۵)}{۳ \times ۲۵۰۰^۲} = ۲۴۷۰N$$

$$P_{BC} = P_{all} \Rightarrow ۰/۷۱F = ۲۴۷۰ \Rightarrow F_{max} = ۳۴۷۹N$$

۵-۱۴. در مجموعهٔ صفحه‌ای نشان داده شده در شکل، عضو چوبی و دو سر مفصل AB به طول مؤثر ۳ متر در فشار کار می‌کند. سطح مقطع این عضو مستطیلی و به ابعاد ۱۰۰×۶۰ میلیمتر می‌باشد. در صورتی که ضریب اطمینان در مقابل کمانش مساوی ۲ فرض شود، حداکثر نیروی F چقدر می‌تواند باشد. از رابطه اولر استفاده کنید و ضریب ارتجاعی چوب را مساوی $۰/۱۲ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.





مسئله ۵-۱۴

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = ۰ \Rightarrow T_x(۲/۴) - (T_y + F)(۱/۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۴}{۵}T\right)(۲/۴) - \left(\frac{۳}{۵}T + F\right)(۱/۸) = ۰ \Rightarrow T = ۲/۱۴F$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x - T_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۲/۱۴F\left(\frac{۴}{۵}\right) \Rightarrow \boxed{B_x = ۱/۷۱۲F}$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow B_y - (T_y + F) = ۰ \Rightarrow B_y = ۲/۱۴F\left(\frac{۳}{۵}\right) + F \Rightarrow \boxed{B_y = ۲/۲۸۴F}$$

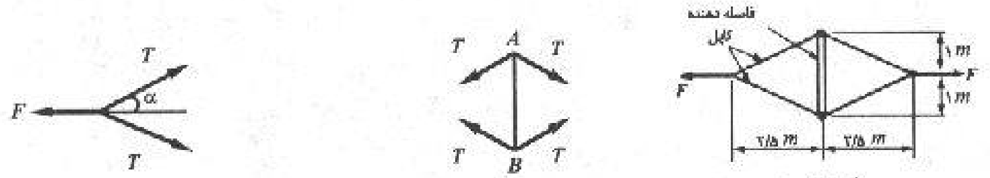
$$P_{AB} = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = \sqrt{(۱/۷۱۲F)^۲ + (۲/۲۸۴F)^۲} \Rightarrow P_{AB} = ۲/۸۵۴F \quad , \quad L_{AB} = ۳m$$

$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} = \frac{\pi^۲(۰/۱۲ \times ۱۰^۵)\left(۱۰۰ \times \frac{۶۰^۳}{۱۲}\right)}{۲ \times (۳۰۰۰)^۲} \approx ۱۱۸۳۲N$$

(با فرض اینکه کمانش حول محور ضعیف باشد)

$$P_{AB} = P_{all} \Rightarrow ۲/۸۵۴F = ۱۱۸۳۲ \Rightarrow \boxed{F = ۴۱۴۶N}$$ حداکثر نیروی F

۱۴-۶. مجموعه سازه‌ای نشان داده شده در شکل مفروض است. در صورتی که مقطع میلهٔ وسط دایره‌ای به قطر ۳۰ میلیمتر و به طول ۲ متر باشد و کابلها به طور صحیح طراحی شده باشند، حداکثر مقدار نیروی F را محاسبه نمایید. از رابطهٔ اولر با ضریب اطمینان ۳ استفاده نمایید و ضریب ارتجاعی مصالح میله را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



مسئله ۱۴-۶

توضیح: به علت تقارن سیستم، نیرو در کابلها برابر است:

$$۲T\,Cos\alpha = F \Rightarrow T = \frac{F}{۲Cos\alpha}$$

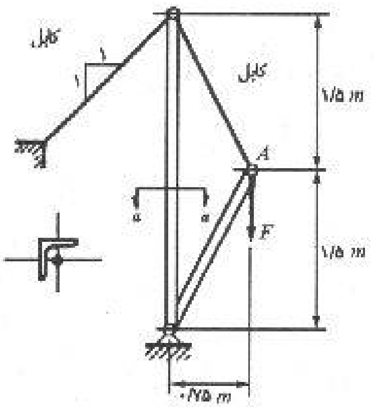
$$P_{AB} = ۲T\,Sin\alpha = F\,tg\alpha = F\left(\frac{۱}{۲/۵}\right) \qquad P_{AB} = \frac{۱}{۲/۵}F$$

$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} = \frac{\pi^۲(۲ \times ۱۰^۵)\left[\frac{۱}{۴}\pi\left(\frac{۳۰}{۲}\right)^۴\right]}{۳\,(۲۰۰۰)^۲} = ۶۵۳۰N$$

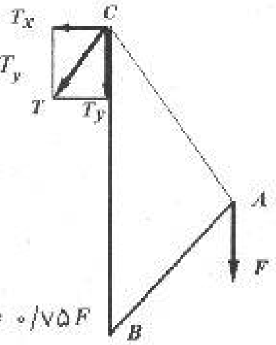
(میله مانند ستون دو سر مفصل عمل می‌کند)

$$P_{AB} = P_{all} \Rightarrow F = ۲/۵ \times ۶۵۳۰ \Rightarrow \boxed{F = ۱۶۳۲۵N}$$ حداکثر نیروی F

۷-۱۴. پایهٔ دکل نشان داده شده در شکل از نیمرخ فولادی نبشی ۱۲ × ۱۰۰ × ۱۰۰ میلیمتر ساخته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر مقدار نیروی F تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و طوری طراحی شده‌اند که پایهٔ دکل به صورت محوری بارگذاری شود. هم چنین از رانش جانبی رأس دکل در امتداد عمود بر صفحهٔ کاغذ جلوگیری شده است. از رابطهٔ اولر با ضریب اطمینان ۳/۵ استفاده نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



مسئله ۷-۱۴

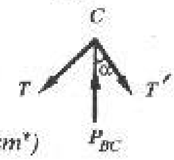


$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow T_x(۳) - F(۰/۷۵) = ۰ \Rightarrow T_x = ۰/۲۵F = T_y$$

C تعادل گرهٔ : $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow T'_x = T_x = ۰/۲۵F$

$$\Rightarrow T'_y = \frac{T'_x}{tg\alpha} = T'_x\left(\frac{۱/۵}{۰/۷۵}\right) = ۰/۵F$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow P_{BC} = T_y + T'_y = ۰/۲۵F + ۰/۵F \Rightarrow P_{BC} = ۰/۷۵F$$

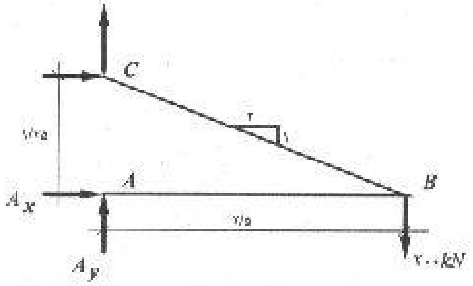


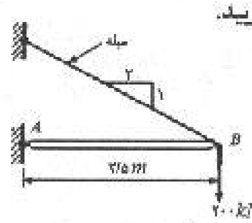
$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} = \frac{\pi^۲(۲ \times ۱۰^۵)(۸۶/۲ \times ۱۰^۴)}{۳/۵\,(۳۰۰۰)^۲} = ۵۳۹۶۲N$$

$$(I_x = I_y = ۲/۷\,cm^۴ ، I_{min} = ۸۶/۲\,cm^۴)$$

$$P_{BC} = P_{all} \Rightarrow F = \frac{۵۳۹۶۲}{۰/۷۵} \Rightarrow \boxed{F_{max} = ۷۱۹۵۰N}$$

۸-۱۴. اگر ظرفیت جرثقیل نشان داده شده در شکل مساوی ۲۰۰ کیلو نیوتن باشد، عضو AB را بر اساس نیمرخ IPB طراحی کنید. از وزن اعضا صرف نظر کنید و از رابطهٔ اولر با ضریب اطمینان ۳/۵ استفاده‌نمایید و ضریب‌ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.





مسئله ۸-۱۴

$$+\circlearrowleft\ \sum M_C = ۰ \Rightarrow A_x = \frac{۲۰۰ \times ۲/۵}{۱/۲۵} = ۴۰۰\,kN$$

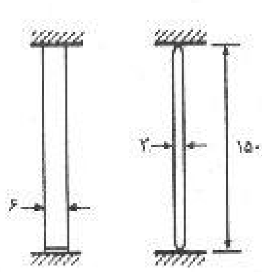
$$\Rightarrow P_{AB} = ۴۰۰\,kN$$

عضو AB : $\sum M_B = ۰ \Rightarrow A_y = ۰$

$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} \Rightarrow I_{min} = \frac{(۴۰۰ \times ۱۰^۳)(۳/۵)(۲۵۰۰^۲)}{\pi^۲ \times ۲ \times ۱۰^۵} \times ۱۰^{-۴} \approx ۴۴۴\,cm^۴$$

از $IPB۱۴۰$ $(A = ۴۳\,cm^۲ ،\ I_x = ۱۵۱۰\,cm^۴ ،\ I_y = ۵۵۰\,cm^۴)$ استفاده می‌کنیم.

۹-۱۴. یک تسمهٔ نازک از فولاد ضد زنگ بین دو صفحه که به فاصلهٔ ثابت ۱۵۰ میلیمتر از یکدیگر قرار دارند، به میزان ۱۰۰ نیوتن پیش فشرده شده است (به شکل مراجعه کنید). این مجموعه در ۲۰ درجهٔ سانتی گراد ساخته شده است. چقدر می‌توانیم درجهٔ حرارت را افزایش دهیم به طوری که ضریب اطمینان در مقابل کمانش مساوی ۲ شود. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع و ضریب انبساط حرارتی را مساوی ۱۵×۱۰^{-۶} بر درجهٔ سانتی‌گراد فرض نمایید.



مسئله ۹-۱۴

توزیع: نیروی به وجود آمده در تکیه‌گاهها ناشی از دو نیروی پیش فشردگی و نیروی ناشی از افزایش طول در اثر افزایش حرارت می‌باشد:

$$P_{all} = P_۰ + P_۱$$

$P_۰ = ۱۰۰\,N$ نیروی پیش فشردگی

$$\begin{cases} \Delta L = \dfrac{P_۱ L_۰}{AE} \\ \Delta L = L_۰ \alpha\,(\theta_۲ - \theta_۱) \end{cases} \Rightarrow P_۱ = AE\alpha(\theta_۲ - ۲۰)$$

از طرفی نیروی مجاز بر اساس رابطهٔ اولر برابر است با :

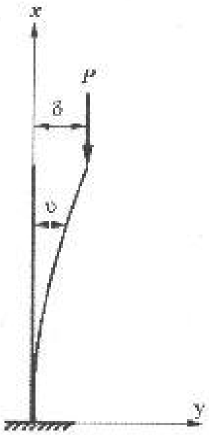
$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲}$$

$$P_۰ + P_۱ = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} \Rightarrow ۱۰۰ + AE\alpha(\theta_۲ - ۲۰) = \frac{\pi^۲ EI}{۲L_e^۲}$$

$$۱۰۰ + (۶ \times ۳)(۲ \times ۱۰^۵)(۱۵ \times ۱۰^{-۶})(\theta_۲ - ۲۰) = \frac{\pi^۲(۲ \times ۱۰^۵)\left(۶ \times \frac{۳^۳}{۱۲}\right)}{۲ \times ۱۵۰^۲}$$

$$\Rightarrow \theta_۲ = ۲۹/۱۱ \text{ سانتی گراد}$$

۱۴-۱۰. بار بحرانی کمانش اولر را برای یک ستون یک سر گیردار، یک سر آزاد به دست آورید.



با توجه به شکل لنگر خمشی در فاصله x از پای ستون عبارت است از :

$$M = -P(\delta - v)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M = P(\delta - v) \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta$$

با فرض $K^2 = \frac{P}{EI}$ معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + K^2v = K^2\delta$$

که جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر می‌باشد :

$$v = A\,Sin\,Kx + B\,Cos\,Kx + \delta$$

برای تعیین ضرایب A و B از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم :
در انتهای گیردار خیز و شیب صفر است.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}$$

$$v' = AK\,Cos\,Kx - BK\,Sin\,Kx$$

$$x = 0,\ v = 0 \quad \rightarrow B = -\delta$$

$$x = 0,\ v' = 0 \quad \rightarrow A = 0$$

بنابراین معادله تغییر مکان به صورت زیر در می‌آید:

$$v = \delta(1 - Cos\,Kx)$$

از طرفی می‌دانیم در $(x = L)$ داریم $(v = \delta)$. با به کار بردن این شرط در معادله اخیر نتیجه می‌شود:

$$\delta\,Cos\,KL = 0$$

برای برقراری رابطه فوق باید $\delta = 0$ یا $Cos\,KL = 0$ باشد.
اگر $\delta = 0$ باشد ستون تغییر مکانی نخواهد داشت و کمانش رخ نمی‌دهد. در این حالت معادله اخیر به ازاء هر مقدار KL برقرار است. بنابراین P نیز می‌تواند هر مقداری باشد.
اما اگر $Cos\,KL = 0$ باشد:

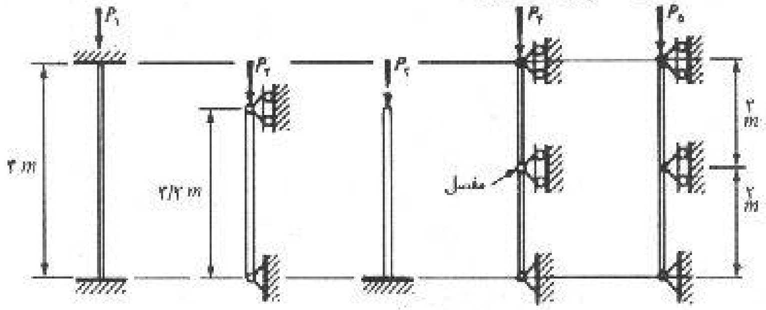
$$Cos\,KL = 0 \rightarrow KL = \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$K^2 = \frac{n^2\pi^2}{4L^2} \xrightarrow{K^2 = \frac{P}{EI}} P = \frac{n^2\pi^2EI}{4L^2}$$

کوچکترین مقدار P به ازای $n = 1$ به دست می‌آید:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{4L^2}}$$

۱۴-۱۱. بار محوری فشاری مجاز برای یک ستون دو سر مفصل به طول ۴ متر که از مصالح ارتجاعی خطی مشخصی ساخته شده، مساوی ۲۰ کیلو نیوتن می‌باشد. پنج ستون دیگر از همان مصالح و با همان سطح مقطع لیکن با شرایط انتهایی متفاوت، مطابق شکل ساخته شده است. با توجه به بار فشاری مجاز ستون دو سر مفصل ۴ متری، بار مجاز برای هر یک از ستونهای نشان داده شده در شکل چقدر می‌باشد؟



مسأله ۱۴-۱۱

$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} \Rightarrow \frac{\pi^۲ EI}{F.S} = P_{all}\cdot L_e^۲ = ۲۰ \times ۴^۲ = ۳۲۰\ kN.m^۲ \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^۲ EI}{F.S} = ۳۲۰\ kN.m^۲ = C}$$

$$P_۱ = \frac{C}{L_e^۲} = \frac{۳۲۰}{(۰/۵ \times ۴)^۲} \Rightarrow P_۱ = ۸۰\ kN$$ ستون دو سر گیردار

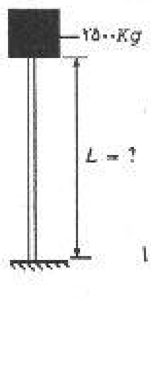
$$P_۲ = \frac{C}{L_e^۲} = \frac{۳۲۰}{(۳/۲)^۲} \Rightarrow P_۱ = ۳۱/۲۵\ kN$$ ستون دو سر مفصل

$$P_۳ = \frac{C}{L_e^۲} = \frac{۳۲۰}{(۲ \times ۳/۲)^۲} \Rightarrow P_۳ = ۷/۸۱\ kN$$ ستون یک سر آزاد

$$P_۴ = \frac{C}{L_e^۲} = \frac{۳۲۰}{۲^۲} \Rightarrow P_۴ = ۸۰\ kN$$ ستون دو سر مفصل

$$P_۵ = \frac{C}{L_e^۲} = \frac{۳۲۰}{۲^۲} \Rightarrow P_۵ = ۸۰\ kN$$

۱۴-۱۲. مخزنی که جرم آن همراه با مایع محتوی، مساوی ۲۵۰۰ کیلوگرم می‌باشد، قرار است توسط یک نیمرخ لوله نگه داشته شود. پای لوله به طور کاملاً گیردار در شالودهٔ بتونی خود قرار گرفته و انتهای فوقانی آن آزاد است. اگر ضریب اطمینان در مقابل کمانش مساوی ۲/۵ فرض شود، حداکثر ارتفاعی که پایهٔ لوله‌ای می‌تواند داشته باشد، چقدر است. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.



مسأله ۱۴-۱۲

مشخصات نیمرخ لوله:

قطر خارجی = ۱۴۱/۳ میلیمتر

ضخامت جداره = ۶/۵۵ میلیمتر

سطح مقطع = ۲۷۷۴ میلیمترمربع

لنگر ماند(ممان اینرسی) = $۶/۳۱ \times ۱۰^۶$ میلیمتر به توان ۴.

$P = Mg = ۲۵۰۰ \times ۱۰ = ۲۵۰۰۰\, kg\, m/s^۲ = ۲۵۰۰۰\, N$

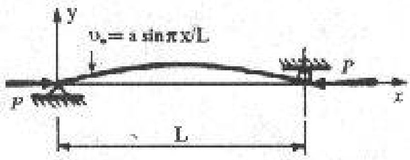
$$P_{all} = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.L_e^۲} \Rightarrow L_e^۲ = \frac{\pi^۲ EI}{F.S.P_{all}} = \frac{\pi^۲(۲\times ۱۰^۵)(۶/۳۱\times ۱۰^۶)}{۲/۵\times ۲۵۰۰۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow L_e = ۱۴۱۰۹\, mm \\ \\ L_e = ۲L \end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{۱۴۱۰۹}{۲} \approx ۷۰۰۰\, mm \Rightarrow \boxed{L_{max} = ۷\, m}$$

۱۴-۱۳. یک میله به شکل منحنی سینوسی با معادله $v_۰ = a\, \sin \pi x/L$ در آورده شده است. اگر مطابق شکل این میله تحت نیروی فشاری محوری قرار گیرد، نشان دهید که تغییر شکل کل برابر است با:

$$v = v_۰ + v_۱ = \left[۱/(۱ - P/P_{Cr})\right] a\, \sin \pi x/L$$

که در آن $P_{cr} = \pi^۲ EI/L^۲$ می‌باشد و مقدار داخل پرانتز ضریب تشدید نامیده می‌شود.

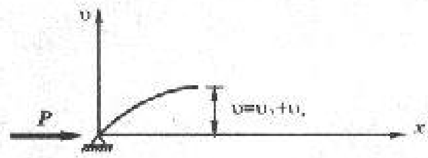


مسئله ۱۴-۱۳

$$M = EIv_۱'' = -Pv = -P(v_۱ + v_۰)$$

$$EIv_۱'' + Pv_۱ = -Pv_۰ \rightarrow v_۱'' + \frac{P}{EI}v_۱ = -\frac{P}{EI}v_۰$$

$$\frac{P}{EI} = \lambda^۲ \quad \rightarrow v_۱'' + \lambda^۲ v_۱ = -\lambda^۲ v_۰$$



$$v_۱ = A\, Sin\lambda x + B\, Cos\lambda x - \frac{\lambda^۲}{\lambda^۲ - (\pi/L)^۲}\, a\, Sin\, \frac{\pi x}{L}$$

$v = v_۱ + v_۰ \qquad v(۰) = ۰ \rightarrow B = ۰ \qquad v(L) = ۰ \rightarrow A\, Sin\,\lambda L = ۰$

$Sin\,\lambda L = ۰ \rightarrow \lambda = \frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^۲ EI}{L^۲}$ بار بحرانی

$$A = ۰ \rightarrow v = v_۱ + v_۰ = \left(-\frac{\lambda^۲}{\lambda^۲ - (\pi/L)^۲} + ۱\right) a\, Sin\, \frac{\pi}{L}x$$

$$-\frac{\lambda^۲}{\lambda^۲ - (\pi/L)^۲} + ۱ = \frac{-(\pi/L)^۲}{\lambda^۲ - (\pi/L)^۲} = \frac{-\pi^۲\frac{EI}{L^۲}}{\lambda^۲ EI - \frac{\pi^۲ EI}{L^۲}} = \frac{-P_{cr}}{P - P_{cr}} = \frac{۱}{۱ - \frac{P}{P_{cr}}}$$

$$\rightarrow v = v_۱ + v_۰ = \left(\frac{۱}{۱ - \frac{P}{P_{cr}}}\right) a\, Sin\, \frac{\pi x}{L}$$

۱۴-۱۴. اگر حد خطی برای فولاد مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و ضریب ارتجاعی مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلیمتر باشد، در چه محدوده‌ای از ضریب لاغری نمی‌توان رابطهٔ اولر را برای یک ستون دو سر گیردار به کار برد.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} \Rightarrow \left.\frac{L_e}{r}\right)_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times ۲ \times ۱۰^{۵}}{۲۵۰}} \Rightarrow \left.\frac{L_e}{r}\right)_{min} = ۸۸/۸۶$$

برای ستون دو سر گیردار داریم $L_e = ۰/۵L$ لذا:

$$\left.\frac{L}{r}\right)_{min} = \frac{۸۸/۸۶}{۰/۵} \approx ۱۷۸$$

یعنی چنانچه ضریب لاغری از ۱۷۸ کمتر گردد، تنش بحرانی از حد خطی فراتر خواهد رفت که در این صورت رابطهٔ اولر صادق نخواهد بود.

۱۵-۱۴. (الف) ضریب لاغری یک میلهٔ دو سر مفصل استوانه‌ای توپر به طول ۱/۵ متر و به قطر ۵۰ میلیمتر چقدر می‌باشد؟ (ب) اگر تمام مصالح میلهٔ فوق تبدیل به یک میله با مقطع مربع با همان طول شود، ضریب لاغری ستون جدید چقدر است؟

الف)

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{۴}R^4}{\pi R^2}} = \frac{R}{۲} = \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow r = ۱۲/۵\,mm$$

$$\lambda = \frac{KL}{r} = \frac{۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^{۳}}{۱۲/۵} \Rightarrow \lambda = ۱۲۰$$

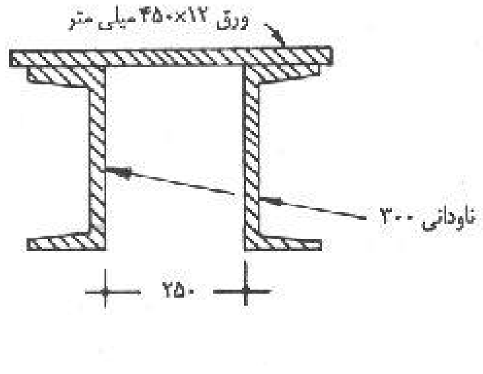
ب)

$$a^2 = \pi R^2 \Rightarrow a = R\sqrt{\pi} = ۲۵\sqrt{\pi} \Rightarrow a = ۴۴/۳\,mm$$

$$I = \frac{a^4}{۱۲} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4/۱۲}{a^2}} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{۱۲}} = ۱۲/۸\,mm$$

$$\lambda = \frac{KL}{r} = \frac{۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^{۳}}{۱۲/۸} \Rightarrow \lambda \approx ۱۱۷$$

۱۶-۱۴. اگر مقطع یک ستون دو سر مفصل به طول ۶ متر، مطابق شکل باشد، ضریب لاغری آن را نسبت به هر دو محور به دست آورید.



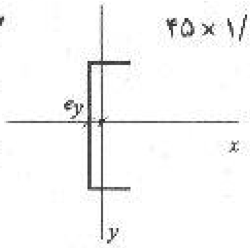
مسئله ۱۴-۱۶

۳۰۰ ناودانی : $I_x = ۸۰۳۰\, cm^۴$

$I_y = ۴۹۵\, cm^۴$

$A = ۵۸/۸\, cm^۲$

$e_y = ۲/۷\, cm$



۴۵ × ۱/۲ ورق : $I_x = \frac{۴۵ \times ۱/۲^۳}{۱۲} = ۶/۴۸\, cm^۴$

$I_y = \frac{۱/۲ \times ۴۵^۳}{۱۲} = ۹۱۱۲/۵\, cm^۴$

$A = ۴۵ \times ۱/۲ = ۵۴\, cm^۲$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(۲ \times ۵۸/۸ \times ۱۵) + (۵۴ \times ۳۰/۶)}{۲ \times ۵۸/۸ + ۵۴} = ۱۹/۹\, cm \quad \text{از پایین}$$

$$I_x = \sum I_{x_\circ} + \sum A_i d^۲ = ۲(۸۰۳۰) + ۶/۴۸ + ۲(۵۸/۸)(۴/۹^۲) + ۵۴(۳۰/۶ - ۱۹/۹)^۲$$
$$= ۲۵۰۷۲/۵\, cm^۴$$

$$I_y = \sum I_{y_\circ} + \sum A_i d^۲ = ۲(۴۹۵) + ۹۱۱۲/۵ + ۲(۵۸/۸)\left(\frac{۲۵}{۲} + ۲/۷\right)^۲ = ۳۷۲۷۲/۸\, cm^۴$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۲۵۰۷۲/۵}{۱۷۱/۶}} = ۱۲/۱\, cm \Rightarrow \lambda_x = \frac{KL}{r_x} = \frac{۶۰۰}{۱۲/۱} \approx ۵۰$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۳۷۲۷۲/۸}{۱۷۱/۶}} = ۱۴/۷\, cm \Rightarrow \lambda_y = \frac{KL}{r_y} = \frac{۶۰۰}{۱۴/۷} \approx ۴۱$$

۱۴-۱۷. نیروی محوری یک ستون دو سر مفصل به طول ۴ متر مساوی ۹۰۰ کیلو نیوتن می‌باشد. با استفاده از روابط AISC ستون فوق را بر اساس نیمرخ IPB طراحی کنید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

ابتدا تنش مجاز را برابر $\sigma_{all} = ۱۲۰\, N/mm^۲$ فرض می‌کنیم،

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^۳}{۱۲۰} = ۷۵۰۰\, mm^۲ = ۷۵\, cm^۲$$

بنابراین از IPB ۲۰۰ با مشخصات زیر استفاده می‌کنیم،

$IPB۲۰۰ : r_x = ۸/۵۴\, cm$ ، $r_y = ۵/۰۷\, cm$ ، $A = ۷۸/۱\, cm^۲$

$$C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ E}{\sigma y}} = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ \times ۲ \times ۱۰^۵}{۲۵۰}} = ۱۲۵/۷$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۴۰۰}{۵/۰۷} = ۷۸/۹ < C_c \Rightarrow F.S = \frac{۵}{۳} + ۳\left(\frac{Le}{r}\right)/\left(۸C_c\right) - \left(\frac{Le}{r}\right)^۳/\left(۸C^۳_c\right)$$

$$F.S = ۱/۸۷$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{F.S.} = \frac{\sigma_y}{F.S}\left[۱ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{le/r}{C_c}\right)^۲\right] \Rightarrow \sigma_{all} = ۱۰۷/۳۵$$

حال تنش را کنترل می‌کنیم،

$$\sigma_{\text{موجود}} = \frac{P}{A} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^۳}{۷۸/۱ \times ۱۰^۲} = ۱۱۵/۲ > \sigma_{all} = ۱۰۷/۳۵$$

بنابراین $IPB۲۰۰$ کافی نیست، حال $IPB۲۲۰$ را کنترل می‌کنیم،

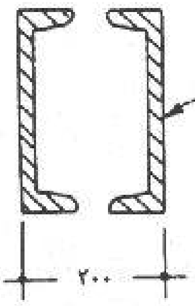
$$IPB۲۲۰: \ r_x = ۹/۴۳\,cm \quad ، \quad r_y = ۵/۵۹\,cm \ ، \quad A = ۹۱\,cm^۲$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۴۰۰}{۵/۵۹} = ۷۱/۶ < C_c \xrightarrow{\text{(رابطه ۱۴-۱۰)}} F.S = ۱/۸۶$$

$$\text{(۱۱-۱۴) رابطه} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{all} = ۱۱۲/۶\,N/mm^۲$$

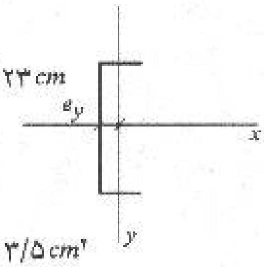
$$\sigma_{\text{موجود}} = \frac{P}{A} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^۳}{۹۱ \times ۱۰^۲} = ۹۸/۹\,N/mm^۲ < \sigma_{all}$$

پس IPB ۲۲۰ مناسب است



مسئله ۱۴-۱۸

۱۴-۱۸. مطلوب است تعیین نیروی محوری فشاری مجاز ستون دو سر مفصلی به طول ۸ متر که مقطع آن مطابق شکل می‌باشد. از روابط $AISC$ استفاده کنید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.



$$\text{ناودانی ۲۴۰}: I_{x_۱} = ۳۶۰۰\,cm^۴, I_{y_۱} = ۲۴۸\,cm^۴, A_۱ = ۴۲/۳\,cm^۲, e_y = ۲/۲۳\,cm$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۲I_{x_۱}}{۲A_۱}} \Rightarrow r_x = ۹/۲۲\,cm$$

$$I_y = \sum I_{y_۱} + \sum A_۱ d^۲ = ۲(۲۴۸) + ۲(۴۲/۳)(\frac{۲۰}{۲} - ۲/۲۳)^۲ = ۵۶۰۳/۵\,cm^۴$$

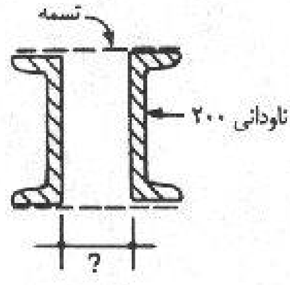
$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۵۶۰۳/۵}{۲(۴۲/۳)}} = ۸/۱۴\,cm$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۸۰۰}{۸/۱۴} = ۹۸/۲۸ < C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ E}{\sigma_y}} = ۱۲۵/۷$$

$$\text{(۱۰-۱۴) رابطه} \quad \Rightarrow F.S = ۱/۹ \qquad\qquad \text{(۱۱-۱۴) رابطه} \quad \delta_{all} = ۹۱/۳۵\,N/mm^۲$$

$$\Rightarrow \quad P_{\text{مجاز}} = \sigma_{all} A = ۹۱/۳۵ \times (۴۲/۳ \times ۲ \times ۱۰^۲) = ۷۷۲۸۲۱\,N \approx ۷۷۳\,kN$$

۱۴-۱۹. مطابق شکل، یک عضو فشاری از دو ناودانی ۲۰۰ تشکیل یافته است. (الف)مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ پشت به پشت ناودانیها به طوری که لنگر ماند در حول هر دو محور مساوی باشد. (ب) اگر ستون دو سر مفصل به طول ۱۰ متر باشد، نیروی محوری مجاز ستون فوق را با استفاده از روابط AISC به دست آورید.



مسئله ۱۴-۱۹

$$\text{ناودانی ۲۰۰}:\begin{cases} I_x = ۱۹۱۰\,cm^۴ \\ I_y = ۱۴۸\,cm^۴ \\ A = ۳۲/۲\,cm^۲ \quad e_y = ۲/۰۱ \end{cases}$$

الف)

$$I_x = ۲I_{x_\circ} = ۲(۱۹۱۰) = ۳۸۲۰\,cm^۴$$

$$I_y = ۲I_{y_\circ} + ۲A_\circ d^۲ = ۲(۱۴۸) + ۲(۳۲/۲)(x + ۲/۰۱)^۲$$

$$I_x = I_y \Rightarrow ۶۴/۴(x + ۲/۰۱)^۲ = ۳۸۲۰ - ۲(۱۴۸) \Rightarrow x = ۵/۳۹ \Rightarrow ۲x = ۱۰/۸\,cm$$

(فاصلهٔ پشت به پشت ناودانیها)

ب)

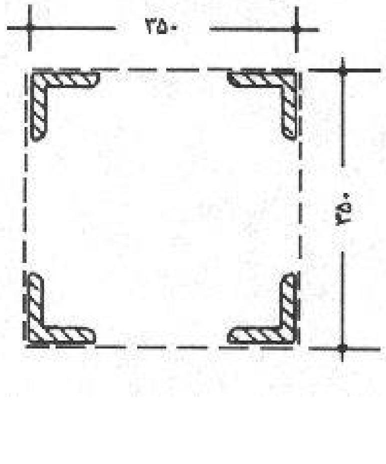
$$r_x = r_y = r_{x_\circ} = ۷/۷\,cm$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{۱۰ \times ۱۰^۲}{۷/۷} = ۱۲۹/۸۷ > C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲E}{\sigma_y}} = ۱۲۵/۷$$

$$\text{رابطه (۱۴-۹)} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\pi^۲E}{۱/۹۲\left(\frac{L_e}{r}\right)^۲} = \frac{\pi^۲(۲ \times ۱۰^۵)}{۱/۹۲(۱۲۹/۸۷)^۲} \approx ۶۱\,N/mm^۲$$

$$\text{نیروی محوری مجاز}\quad P_{all} = \sigma_{all}A = \left[۶۱ \times (۲ \times ۳۲/۲ \times ۱۰^۲)\right] \times ۱۰^{-۳} \approx ۳۹۳\,kN$$

۱۴-۲۰. مطابق شکل، بوم یک ماشین خاکبرداری از چهار نبشی ۱۱ × ۶۵ × ۶۵ میلیمتر تشکیل یافته است. اگر طول این بوم ۱۶ متر باشد، چه نیرویی می‌تواند بر آن وارد شود؟ از رابطهٔ اولر با ضریب اطمینان ۴ استفاده نمایید.



مسئله ۱۴-۲۰

$A_1 = ۱۳/۲ cm^2$ ، نبشی ۱۱ × ۶۵

$I_1 = ۴۸/۸ cm^4$

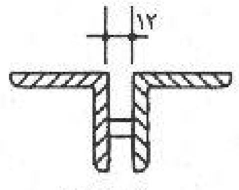
$e = ۲ cm$

$I = ۴(۴۸/۸) + ۴(۱۳/۲)(\frac{۳۵}{۲} - ۲)^2 = ۱۲۸۸۰/۴ cm^4$

$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{۱}{۴}\left[\frac{\pi^2 EI}{L_e^2}\right] = \frac{۱}{۴}\left[\frac{\pi^2(۲\times۱۰^۵)(۱۲۸۸۰/۴\times۱۰^۴)}{(۲\times۱۶\times۱۰^۲)^2}\right] = ۶۲۰۷۲/۵N \approx ۶۲kN$

(توجه شود که بوم همانند یک ستون یک سر آزاد، یک سر گیردار عمل می‌کند.)

۱۴-۲۱. مطابق شکل،عضو فشاری یک خرپا از دو نبشی ۱۰ × ۱۰۰ × ۱۰۰ میلیمتر تشکیل یافته است. اگر طول عضو مساوی ۲/۴ متر باشد، بر طبق روابط AISCچه نیروی فشاری می‌تواند توسط این عضو حمل گردد. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

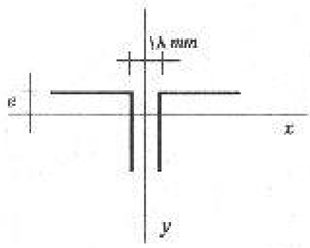


مسئله ۱۴-۲۱

$A_1 = ۱۹/۲ cm^2$:نبشی ۱۰ × ۱۰۰

$I_1 = ۱۷۷ cm^4$

$e = ۲/۸۲ cm$



$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۲I_{x_1}}{۲A_1}} = ۳/۰۴ cm$

$I_y = ۲(۱۷۷) + ۲(۱۹/۲)(\frac{۱/۲}{۲} + ۲/۸۲)^2 = ۸۰۳$

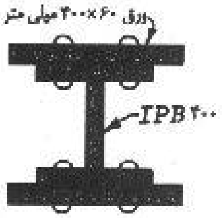
$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۸۰۳}{۲(۱۹/۲)}} = ۴/۵۷ cm$

$\frac{L_e}{r_x} = \frac{۲۴۰}{۳/۰۴} = ۷۸/۹۵ < C_c = ۱۲۵/۷$

(رابطه ۱۴-۱۰) $\Rightarrow F.S = ۱/۸۷$ (رابطه ۱۴-۱۱) $\Rightarrow \sigma_{all} = ۱۰۷/۲۵ N/mm^2$

$P_{all} = \sigma_{all} \cdot A = [۱۰۷/۲۵(۲\times۱۹/۲\times۱۰^2)]\times۱۰^{-3} = ۴۱۲kN$

۱۴-۲۲. مقطع یک ستون دو سر مفصل به طول ۶ متر مطابق شکل می‌باشد. بر طبق روابط *AISC* بار محوری مجاز این ستون چقدر می‌باشد؟ تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۹۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.



مسأله ۱۴-۲۲

$$IPB\,۴۰۰:\ \begin{cases} A = ۱۹۸\,cm^۲ \\ I_{x_۰} = ۵۷۶۸۰\,cm^۴ \\ I_{y_۰} = ۱۰۸۲۰\,cm^۴ \end{cases} \quad ، \quad PL\,۴۰\times۶\,cm \begin{cases} A = ۲۴۰\,cm^۲ \\ I_{x_۰} = ۴۰\times\frac{۶^۳}{۱۲} = ۷۲۰\,cm^۴ \\ I_{y_۰} = ۶\times\frac{۴۰^۳}{۱۲} = ۳۲۰۰۰\,cm^۴ \end{cases}$$

$$I_x = ۵۷۶۸۰ + ۲(۷۲۰) + ۲(۲۴۰)(۲۰+۳)^۲ = ۳۱۳۰۴۰\,cm^۴$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۳۱۳۰۴۰}{۶۷۸}} = ۲۱/۴۹\,cm$$

$$I_y = ۱۰۸۲۰ + ۲(۳۲۰۰۰) = ۷۴۸۲۰\,cm^۴$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۷۴۸۲۰}{۶۷۸}} = ۱۰/۵۰\,cm$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۶۰۰}{۱۰/۵} = ۵۷/۱۴ < C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ E}{\sigma_y}} = ۱۱۶/۷$$

(۱۰-۱۴) رابطه $\Rightarrow F.S = ۱/۸۴$ (۱۱-۱۴) رابطه $\Rightarrow \sigma_{all} = ۱۱۹/۹\,N/mm^۲$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = [۱۱۹/۹\times(۶۷۸\times۱۰^۲)]\times۱۰^{-۳} = ۸۱۲۹\,kN$$

۱۴-۲۳. یک ستون آلمینیومی به طول ۴/۵ متر از نیمرخ *IPB* ۲۰۰ مفروض است. بار محوری مجاز آن را بااستفاده از روابط ۱۴-۴۶ تا ۱۴-۴۸ به دست آورید.

با فرض آنکه ستون دو سر مفصل و آلیاژ از نوع *T۶* - ۶۰۶۱ باشد،

$IPB۲۰۰:\ r_y = ۵/۰۷\,cm$ و $A = ۷۸/۱\,cm^۲$

$$\frac{L}{r_y} = \frac{۴۵۰}{۵/۰۷} = ۸۸/۸ > ۶۶ \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{۳۵۱\times۱۰^۳}{(۸۸/۸)^۲} = ۴۴/۵\,N/mm^۲$$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = [۴۴/۵\times۷۸/۱\times۱۰^۲]\times۱۰^{-۳} = ۳۴۷/۵\,kN$$

۱۴-۲۴. یک ستون چوبی با مقطع مربع به ابعاد ۱۰۰×۱۰۰ میلیمتر مفروض می‌باشد. بار محوری مجاز این ستون را در دو حالت یکی وقتی که طول ستون مساوی ۳ متر و دیگر وقتی که طول ستون مساوی ۵ متر است، به دست آورید. ضریب ارتجاعی را مساوی $۰/۱۱ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

$$\frac{L}{d} = \frac{۳۰۰}{۱۰} = ۳۰ < ۵۰ \xrightarrow{(۵۳-۱۴)} \sigma_{all} = \frac{۰/۳E}{(L/d)^۲} = \frac{۰/۳ \times ۰/۱۱ \times ۱۰^۵}{۳۰^۲} = ۳/۶\ N/mm^۲$$

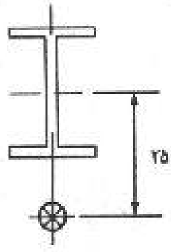
$$P_{all} = \sigma_{all}A = ۳/۶ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۳۶۰۰۰\ N = ۳۶\ kN$$

$$\frac{L}{d} = \frac{۵۰۰}{۱۰} = ۵۰ \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{۰/۳ \times ۰/۱۱ \times ۱۰^۵}{۵۰^۲} = ۱/۳۲\ N/mm^۲$$

$$P_{all} = ۱/۳۲ \times ۱۰۰^۲ = ۱۳۲۰۰\ N = ۱۳/۲\ kN$$

باید توجه نمود که در هر حالت، تنش مجاز نباید از تنش فشاری مجاز برای فشار موازی با الیاف چوب، تجاوز کند. البته چون تنش مجاز فشاری، ارائه نشده است در اینجا چنین کنترلی صورت نگرفته است.

۱۴-۲۵. مطابق شکل، یک ستون از نیمرخ IPB ۳۰۰ و طول ۶ متر تحت بار خارج از مرکز ۸۰۰ کیلو نیوتن قرار دارد. با استفاده از روابط اثر متقابل، کنترل نمایید که آیا این ستون رضایت بخش است یا نه. ستون را دو سر مفصل فرض کنید. F_b را مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید. تنش جاری شدن فولاد مساوی ۲۴۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.



مسئله ۱۴-۲۵

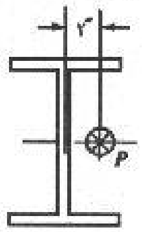
$$IPB۳۰۰ \quad \begin{cases} r_x = ۱۳ & A = ۱۴۹\ cm^۲ \\ r_y = ۷/۵۸ & S_x = ۱۶۸۰\ cm^۳ \\ & S_y = ۵۷۱\ cm^۳ \end{cases}$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۶۰۰}{۷/۵۸} = ۷۹/۱۶ < C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{۲\pi^۲(۲\times۱۰^۵)}{۲۴۰}} = ۱۲۸$$

رابطه (۱۴-۱۰) $\Rightarrow F.S = ۱/۸۷$ رابطه (۱۴-۱۱) $\Rightarrow \sigma_{all} = ۱۰۳/۸۶\ N/mm^۲$

$$\frac{\frac{P}{A}}{\sigma_{all}} + \frac{\frac{M}{S}}{F_b} = \frac{\frac{۸۰۰ \times ۱۰^۳}{۱۴۹ \times ۱۰^۲}}{۱۰۳/۸۶} + \frac{\frac{۸۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۲۵۰}{۱۶۸۰ \times ۱۰^۳}}{۱۴۰} = ۱/۳۷ > ۱$$

ستون رضایت بخش نیست.



مسأله ۱۴-۲۶

۱۴-۲۶. مطابق شکل، یک ستون دو سر مفصل از نیمرخ IPB ۳۰۰ و طول ۶ متر تحت بار خارج از مرکز P قرار دارد. بار مجاز P را بر اساس روابط اثر متقابل تعیین نمایید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ و F_b را مساوی ۱۸۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

مشخصات IPB۳۰۰ مانند مسأله قبل می‌باشد

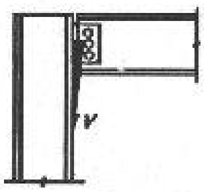
$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۶۰۰}{۷/۵۳} = ۷۹/۱۶$$

$$C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{۲\pi^۲(۲\times ۱۰^۵)}{۲۵۰}} = ۱۲۵/۷$$

$$(۱۰-۱۴)\ \text{رابطه} \Rightarrow \frac{L_e}{r} < C_c \Rightarrow F.S = ۱/۸۷ \qquad (۱۱-۱۴)\ \text{رابطه} \Rightarrow \sigma_{all} = ۱۰۷/۱\ N/mm^۲$$

$$\frac{\frac{P}{A}}{\sigma_{all}} + \frac{\frac{M}{S_y}}{F_b} \le ۱ \Rightarrow \frac{\frac{P}{۱۴۹\times ۱۰^۲}}{۱۰۷/۱} + \frac{\frac{P(۲\times ۲۵/۴)}{۵۷۱\times ۱۰^۳}}{۱۸۵} \le ۱$$

$$P\left(\frac{۱}{۱۵۹۵۷۹۰} + \frac{۵۰/۸}{۱۰۵۶۳۵۰۰۰}\right) \le ۱ \Rightarrow P_{\text{مجاز}} \le ۹۰۳\, kN$$



مسأله ۱۴-۲۷

۱۴-۲۷. اتصال ساده یک تیر به ستون در شکل نشان داده شده است. ستون از IPB ۲۴۰ به طول ۴۳۰ سانتی متر می‌باشد. مقدار نیروی مجاز V را بر اساس روابط اثر متقابل به دست آورید. نیروی V مماس بر سطح بیرونی بال و در روی محور y نیمرخ قرار دارد. ستون را دو سر مفصل در نظر بگیرید. تنش جاری شدن مساوی ۲۵۰ و F_b مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.

$$IPB۲۴۰ \left\{ \begin{array}{ll} A = ۱۰۶\, cm^۲ & \\ r_x = ۱۰/۳\, cm & S_x = ۹۳۸\, cm^۳ \\ r_y = ۶/۰۸\, cm & \end{array} \right.$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۴۳۰}{۶/۰۸} = ۷۰/۷۲ < C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^۲ E}{\sigma_y}} = ۱۲۵/۷$$

$$(۱۰-۱۴)\ \text{رابطه} \Rightarrow F.S = ۱/۸۶ \qquad (۱۱-۱۴)\ \text{رابطه} \Rightarrow \sigma_{all} = ۱۱۳/۴\ N/mm^۲$$

$$\frac{\frac{V}{A}}{\sigma_{all}} + \frac{\frac{M}{S_x}}{F_b} \leqslant \frac{\frac{V}{۱۰۶\times ۱۰^۲}}{۱۱۳/۴} + \frac{\frac{V\times ۱۲۰}{۹۳۸\times ۱۰^۳}}{۱۵۰} \leqslant ۱ \quad \Rightarrow V_{\text{مجاز}} \leqslant ۵۹۳/۵\, kN$$